

Výpočet rezerv pro časově rozložené pojistné plnění v neživotním pojištění

Bohuslav Sekerka, Soukromá vysoká škola ekonomických studií Praha

V neživotním pojištění se uvažuje rezerva na nezasloužení pojistné, rezerva na pojistná plnění, rezerva pojistného neživotních pojištění, vyrovnávací rezerva a případně další.¹

Popišme ve stručnosti význam některých z uvedených rezerv. Rezerva pojistného neživotních pojištění vyplývá ze skutečnosti, že pojistné po celou dobu pojištění zůstává zpravidla stejné. Očekávané výše pojistných plnění mohou u některých produktů (tarifů) růst s dobou trvání pojištění např. s věkem pojištěného. Proto se vytváří rezerva pojistného neživotního pojištění. Závise-li výše této rezervy na věku pojištěného, nazýváme ji rezerva na stáří.

Vyrovnávací rezerva je určena na vyrovnávání zvýšených nákladů na pojistná plnění, která vznikají z titulu výkyvů ve škodovém poměru, které jsou způsobeny skutečnostmi nezávislými na pojišťovně. Výše této rezervy se zpravidla určuje procentem (promílí) z čistého zaslouženého pojistného.

Předmětem článku rezerva na pojistná plnění.

Rezerva na pojistná plnění

Libovolná pojistná událost i prochází od určitými etapami, které jsou vymezeny časovými okamžiky

- t_{i0} vznik pojistné události
- t_{i1} ohlášení pojistné události
- t_{i2} plné uhrazení pojistného plnění.

Pojistná událost i , která se nachází v intervalu

(t_{i0}, t_{i1}) je neohlášená pojistná událost (IBRN incurred but not reported), které odpovídá rezerva na pojistná plnění z neohlášených pojistných událostí. Tato rezerva se vypočítává matematicko-statistickými metodami (např. Chain-Ladder) na základě statistických dat z událostí obdobného druhu, která vypovídají o velikosti platby a o době mezi vznikem a hlášením pojistné události, nebo se určuje kvalifikovaným odhadem.

(t_{i1}, t_{i2}) je ohlášená pojistná událost, ale dosud nevypořádaná pojistná událost.

Někdy se rozlišuje

- a) nevyřízená pojistná událost, které odpovídá rezerva na pojistná plnění z nevyřízených pojistných událostí. Tato rezerva se označuje RBNS (Reported but not settled). U této rezervy není známa výše plateb. Rezerva se vypočítává matematicko-statistickými metodami (např. Chain-Ladder) na základě statistických dat o pojistné události, která vypovídají o velikosti a časovém rozložení dílčích plateb nebo se určuje kvalifikovaným odhadem.
- b) vyřízená, ale neuhrazená pojistná událost, které odpovídá rezerva na pojistná plnění vyřízených, ale neuhrazených pojistných událostí. Jde o

¹ Příspěvek vznikl z mých poznámek připravených pro vedení práce v rámci studentské výzkumné činnosti a vychází z publikace Sekerka B.: Matematické a statistické metody ve financování, cenných papírech a pojištění, Professs Consulting, Praha 2002 a literatury uvedené v citované knize.

pojistné události, u nichž jsou již definitivně stanoveny platby pojistného plnění, ale platby jsou z nejrůznějších důvodů odloženy na další pojistná období. U této rezervy je tedy známa výše plateb. Rezerva se určí součtem příslušných plateb.

(t_{i3} , ∞) je ohlášená pojistná událost, u které je plnění zcela uhrazeno (pojistná událost vyřízená).

Rezervy se v tomto případě neurčuje.

Časové rozložení rezervy

U některých pojistných plnění, jsou platby časově rozloženy. Proto je nutné odhadnout budoucí platby a vytvořit pro ně potřebnou rezervu. Tato skutečnost vyplývá z toho, že zjištění konečné výše škody může trvat i několik let a na počátku likvidace není přesně známa. Vystupují zde přitom především následující typy pojistných rezerv:

- rezerva pro vzniklé, ale doposud nehlášené pojistné události (tzv. IBNR rezerva = Incurred But Not Reported);
- rezerva pro hlášené, ale doposud nevyřízené pojistné události (tzv. RBNS rezerva = Reported But Not Settled);
- rezerva pro vyřízené, ale doposud neproplacené pojistné události (někdy jsou již definitivně stanovené platby pojistného plnění z nejrůznějších důvodů odloženy až na další pojistná období).

Výchozí data

Předpokládejme, že v období $t+s$ došlo k pojistné události a v tomto období bylo vyplaceno pojistné plnění $x_{s,0}$, V následujícím období $s+1$ bylo vyplaceno $x_{s,1}$, atd., až poslední částka byla vyplacena v období $s+T$ ve výši $x_{s,T}$, kde T je maximální počet období, ve kterých je vypláceno pojistné plnění. Tak časové rozložení vyplácených částek v obdobích vzniku pojistné události a následujících obdobích po vzniku je popsáno hodnotami

$$x_{s,0}, x_{s,1}, x_{s,2}, \dots, x_{s,T},$$

kde $s = 0, 1, 2, \dots, T$.

Platba hodnoty $x_{s,i}$ se uskuteční v období $t+s+i$. Protože období je určité délky vyjadřujeme hodnotu plateb v dohodnutém okamžiku v rámci období. Zpravidla je tímto okamžikem střede období.

Hodnoty je též nutné převést na hodnotu k datu, ke kterému se počítá velikost rezerv. Posloupnost plateb můžeme v jednotlivých obdobích znázornit schématem

Období	t	t+1	t+2	...	t+T-1	t+T	t+T+1	t+T+2	t+T+3
t	$x_{0,0}$	$x_{0,1}$	$x_{0,2}$...	$x_{0,T-1}$	$x_{0,T}$			
t+1		$x_{1,0}$	$x_{1,1}$...	$x_{1,T-2}$	$x_{1,T-1}$	$x_{1,T}$		
t+2			$x_{2,0}$...	$x_{2,T-3}$	$x_{2,T-2}$	$x_{2,T-1}$	$x_{2,T}$	
...
t+T-1					$x_{T-1,0}$	$x_{T-1,1}$	$x_{T-1,2}$	$x_{T-1,3}$	$x_{T-1,4}$
t+T						$x_{T,0}$	$x_{T,1}$	$x_{T,2}$	$x_{T,3}$

Na konci období $t+T$ jsou známa data uvedená sloupcích $t, t+1, t+2, \dots, t+T-1, t+T$.

Protože v této tabulce jsou ve sloupcích uvedené hodnoty, které odpovídají obdobím, ve kterých se uskutečňují platby, je tato tabulka vhodná např. k úpravě hodnot přihlížejících k inflaci.

Uvedené hodnoty upravíme do trojúhelníkového schématu, v němž jsou celková doposud vyplacená pojistná plnění uspořádána do tabulky podle roku vzniku příslušné pojistné události a zároveň podle počtu let, která od vzniku pojistné události uplynula. Tak získáme následující tabulku:

Období	0	1	2	...	T-2	T-1	T
t	$x_{0,0}$	$x_{0,1}$	$x_{0,2}$...	$x_{0,T-2}$	$x_{0,T-1}$	$x_{0,T}$
t+1	$x_{1,0}$	$x_{1,1}$	$x_{1,2}$...	$x_{1,T-2}$	$x_{1,T-1}$	
t+2	$x_{2,0}$	$x_{2,1}$	$x_{2,2}$...	$x_{2,T-2}$		
...
t+T-1	$x_{T-1,0}$	$x_{T-1,1}$...			
t+T	$x_{T,0}$...			

Hodnoty ve sloupcích 0, 1, 2, ..., T uvedené tabulky odpovídají částkám, které jsou vypláceny v obdobích od vzniku pojistné události, tj. vznikla-li pojistná událost v období t+s, potom částka $x_{s,j}$, kde i splňuje $0 \leq j \leq T-s$ značí částku vyplacenou v období t+s+j.

Z tabulky dále vidíme, že v období t+T se vyplatí částka

$$x_{T,0}, x_{T-1,1}, x_{T-2,2}, \dots, x_{0,T}.$$

Ze získané tabulky vytvoříme kumulovanou tabulku (kumulované trojúhelníkové schéma)

Období	0	1	2	...	T-2	T-1	T
t	$y_{0,0}$	$y_{0,1}$	$y_{0,2}$...	$y_{0,T-2}$	$y_{0,T-1}$	$y_{0,T}$
t+1	$y_{1,0}$	$y_{1,1}$	$y_{1,2}$...	$y_{1,T-2}$	$y_{1,T-1}$	
t+2	$y_{2,0}$	$y_{2,1}$	$y_{2,2}$...	$y_{2,T-2}$		
...
t+T-1	$y_{T-1,0}$	$y_{T-1,1}$...			
t+T	$y_{T,0}$...			

kde pokládáme

$$y_{i,0} = x_{i,0} \quad \text{pro } i=0, 1, \dots, T$$

$$\begin{aligned} y_{0,1} &= y_{0,0} + x_{0,1} & y_{0,2} &= y_{0,1} + x_{0,2} \\ y_{1,1} &= y_{1,0} + x_{1,1} & y_{1,2} &= y_{1,1} + x_{1,2} \\ y_{2,1} &= y_{2,0} + x_{2,1} & y_{2,2} &= y_{2,1} + x_{2,2} \\ &\dots & &\dots \\ y_{T-2,1} &= y_{T-2,0} + x_{T-2,1} & y_{T-2,2} &= y_{T-2,1} + x_{T-1,2} \\ y_{T-1,1} &= y_{T-1,0} + x_{T-1,1} & & \end{aligned}$$

atd.

V následujícím výkladu popíšeme vybrané metody užívané pro odhad budoucích pojistných rezerv na základě známých údajů.

Klasická metoda Chain-Ladder

Uvedeme nejjednodušší variantu jedné z nejpoužívanějších metod, která se nazývá Chain-Ladder (stupňová metoda)

Z tabulky kumulovaných hodnot vytvoříme „indexy“

Období	1/0	2/1	3/2	...	(T-1)/(T-2)	T/(T-1)
t	$a_{0,1}$	$a_{0,2}$	$a_{0,3}$...	$a_{0,T-1}$	$a_{0,T}$
t+1	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$...	$a_{1,T-1}$	
t+2	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$...		
...
t+T-2	$a_{T-2,1}$	$a_{T-2,2}$...		
t+T-1	$a_{T-1,1}$...		

Pro jednotlivé sloupce získáme průměry, které se využijí při dopočítávání předpokládaných hodnot v budoucnosti vyplácených.

Období	1/0	2/1	3/2	...	(T-1)/(T-2)	T/(T-1)
Průměr	$a_{1/0}$	$a_{2/1}$	$a_{3/2}$		$a_{(T-1)/(T-2)}$	$a_{T/(T-1)}$

Získané průměry použijeme pro odhad údajů pod hlavní diagonálou tabulky

Období	0	1	2	...	T-2	T-1	T
t	$y_{0,0}$	$y_{0,1}$	$y_{0,2}$...	$y_{0,T-2}$	$y_{0,T-1}$	$y_{0,T}$
t+1	$y_{1,0}$	$y_{1,1}$	$y_{1,2}$...	$y_{1,T-2}$	$y_{1,T-1}$	
t+2	$y_{2,0}$	$y_{2,1}$	$y_{2,2}$...	$y_{2,T-2}$		
...
t+T-1	$y_{T-1,0}$	$y_{T-1,1}$...			
t+T	$y_{T,0}$...			

$$y_{1,T} = a_{T/(T-1)} y_{1,(T-1)}$$

$$y_{2,T-1} = a_{(T-1)/(T-2)} y_{2,(T-2)}$$

$$y_{2,T} = a_{T/(T-1)} y_{2,(T-1)}$$

$$y_{3,T-2} = a_{(T-2)/(T-3)} y_{3,(T-3)}$$

$$y_{3,T-1} = a_{(T-1)/(T-2)} y_{3,(T-2)}$$

$$y_{3,T} = a_{T/(T-1)} y_{3,(T-1)}$$

atd.

S využitím rekonstruovaných hodnot lze vyčíslit odhad dosud nezaplaceného pojistného plnění, které vyjadřuje výši netto rezerv, které je nutno vytvořit. Rekonstruujeme-li hodnoty v posledním sloupci, dostaneme

$$y_{1,T} = a_{T/(T-1)} y_{1,(T-1)} = k_{T-1} y_{1,(T-1)}$$

$$y_{2,T} = a_{T/(T-1)} a_{(T-1)/(T-2)} y_{2,(T-2)} = k_{T-2} y_{2,(T-2)}$$

$$y_{3,T} = a_{T/(T-1)} a_{(T-1)/(T-2)} a_{(T-2)/(T-3)} y_{3,(T-3)} = k_{T-3} y_{3,(T-3)}$$

...

$$y_{T,T} = a_{T/(T-1)} a_{(T-1)/(T-2)} \dots a_{1/0} y_{T,0} = k_0 y_{T,0}$$

kde koeficienty $k_s, s=0,1,2,\dots,T-1$ jsou definovány pomocí vztahů

$$\begin{aligned} k_{T-1} &= a_{T/(T-1)} \\ k_{T-2} &= a_{(T-1)/(T-2)} k_{T-1} = a_{(T-1)/(T-2)} a_{T/(T-1)} \\ k_{T-3} &= a_{(T-2)/(T-3)} k_{T-2} = a_{(T-2)/(T-3)} a_{(T-1)/(T-2)} a_{T/(T-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_1 &= a_{2/1} \quad k_2 = a_{T/(T-1)} a_{(T-1)/(T-2)} \dots a_{2/1} \\ k_0 &= a_{1/0} \quad k_1 = a_{T/(T-1)} a_{(T-1)/(T-2)} \dots a_{1/0} . \end{aligned}$$

Po odečtení diagonálních hodnot od posledního sloupce doplněného trojúhelníkového schématu a po sečtení těchto rozdílů se získá hledaný odhad rezervy. Označíme-li r_s rezervu pro pojistné události, které vznikly v období s , vidíme, že platí

$$\begin{aligned} r_0 &= 0 \\ r_1 &= (1-k_{T-1}) y_{1,(T-1)} \\ r_2 &= (1-k_{T-2}) y_{2,(T-2)} \\ r_3 &= (1-k_{T-3}) y_{3,(T-3)} \\ &\dots \\ r_T &= (1-k_0) y_{T,0} . \end{aligned}$$

Celkovou rezervu získáme součtem hodnot r_s .

Modifikace této metody zohledňují předpokládaný vývoj inflace (zpravidla je-li uvažovaným jednotkovým obdobím rok) a další aspekty např. přidání sloupce $T+1$, který obsahuje odhadnuté budoucí platby.

Metoda získání časových koeficientů

Vyjdeme z tabulky kumulovaných dat

Období	0	1	2	...	T-2	T-1	T
t	$y_{0,0}$	$y_{0,1}$	$y_{0,2}$...	$y_{0,T-2}$	$y_{0,T-1}$	$y_{0,T}$
t+1	$y_{1,0}$	$y_{1,1}$	$y_{1,2}$...	$y_{1,T-2}$	$y_{1,T-1}$	
t+2	$y_{2,0}$	$y_{2,1}$	$y_{2,2}$...	$y_{2,T-2}$		
...
t+T-1	$y_{T-1,0}$	$y_{T-1,1}$...			
t+T	$y_{T,0}$...			

Budeme předpokládat, že hodnoty $y_{i,j}$ pro $j=0,1,\dots,T-1, i=0,1,\dots,T-j-1$ splňují vztahy

$$y_{i,j+1} = c_j y_{i,j} ,$$

kde $c_j, j=0,1,\dots,T-1$ jsou neznámé parametry. Naším úkolem je odhadnout hodnoty neznámých parametrů. K tomu použijeme metody nejmenších čtverců.

Budeme uvažovat výraz

$$F = \sum_{j=0}^{T-1} \sum_{i=0}^{T-j-1} (y_{i,j+1} - c_j y_{i,j})^2 .$$

Uvažujme libovolný přípustný sčítanec $s_{i,j} = (y_{i,j+1} - c_j y_{i,j})^2$. Pro parciální derivace platí

$$[\partial s_{i,j} / \partial c_j] = -2 (y_{i,j+1} - c_j y_{i,j}) y_{i,j} .$$

Výpočtem zjistíme

$$\frac{\partial F}{\partial c_j} = -2 \sum_{i=0}^{T-j-1} (y_{i,j+1} - c_j y_{i,j}) y_{i,j}.$$

Položíme vypočtené derivace rovny nule. Dostaneme

$$\sum_{i=0}^{T-j-1} (y_{i,j+1} - c_j y_{i,j}) y_{i,j} = 0.$$

Odtud dostaneme

$$c_j = \frac{\sum_{i=0}^{T-j-1} y_{i,j+1} y_{i,j}}{\sum_{i=0}^{T-j-1} y_{i,j}^2}.$$

Po získání hodnot c_j $j=0,1,\dots,T-1$ postupujeme analogicky jako u metody Chain-Ladder. Dopotítáme nejprve hodnoty $y_{i,j}$ $i=1,2,\dots,T$ $j=T-i+1, \dots, T$ a poté určíme hledanou rezervu součtem hodnot $(y_{i,T} - y_{i,T-i})$ pro $i=1,2,\dots,T$.

Metoda rozložení plateb podle první platby

Vyjdeme z tabulky nekumulovaných dat

Obdob	0	1	2	...	T-2	T-1	T
i							
t	$x_{0,0}$	$x_{0,1}$	$x_{0,2}$...	$x_{0,T-2}$	$x_{0,T-1}$	$x_{0,T}$
t+1	$x_{1,0}$	$x_{1,1}$	$x_{1,2}$...	$x_{1,T-2}$	$x_{1,T-1}$	
t+2	$x_{2,0}$	$x_{2,1}$	$x_{2,2}$...	$x_{2,T-2}$		
...
t+T-1	$x_{T-1,0}$	$x_{T-1,1}$...			
t+T	$x_{T,0}$...			

Budeme předpokládat, že hodnoty $x_{i,j}$ pro $j=1,\dots,T$, $i=0,1,\dots,T-j-1$ splňují vztahy

$$x_{i,j} = d_j x_{i,0},$$

kde d_j $j=1,\dots,T$ jsou neznámé parametry. Naším úkolem je odhadnout hodnoty neznámých parametrů. K tomu použijeme metody nejmenších čtverců.

Budeme uvažovat výraz

$$F = \sum_{j=1}^T \sum_{i=0}^{T-j} (x_{i,j} - d_j x_{i,0})^2.$$

Uvažujme libovolný přípustný sčítanec $s_{i,j} = (x_{i,j} - d_j x_{i,0})^2$. Pro parciální derivace platí

$$[\partial s_{i,j} / \partial d_j] = -2 (x_{i,j} - d_j x_{i,0}) x_{i,0}.$$

Výpočtem zjistíme

$$\frac{\partial F}{\partial d_j} = -2 \sum_{i=0}^{T-j} (x_{i,j} - d_j x_{i,0}) x_{i,0}.$$

Položíme vypočtené derivace rovny nule. Dostaneme

$$\sum_{i=0}^{T-j} (x_{i,j} - d_j x_{i,0}) x_{i,0} = 0.$$

Odtud dostaneme

$$d_j = \frac{\sum_{i=0}^{T-j} x_{i,j} x_{i,0}}{\sum_{i=0}^{T-j} x_{i,0}^2}.$$

Po získání hodnot d_j $j=1, \dots, T$ dopočítáme hodnoty $x_{i,j}$ $i=1, 2, \dots, T$, $j=T-i+1, \dots, T$ a poté určíme hledanou rezervu součtem dopočítaných hodnot.

Metoda rozkladu

Vyjdeme z dat, která jsou uvedena v následující tabulce

Období	0	1	2	...	T-2	T-1	T
t	$x_{0,0}$	$x_{0,1}$	$x_{0,2}$...	$x_{0,T-2}$	$x_{0,T-1}$	$x_{0,T}$
t+1	$x_{1,0}$	$x_{1,1}$	$x_{1,2}$...	$x_{1,T-2}$	$x_{1,T-1}$	
t+2	$x_{2,0}$	$x_{2,1}$	$x_{2,2}$...	$x_{2,T-2}$		
...
t+T-1	$x_{T-1,0}$	$x_{T-1,1}$...			
t+T	$x_{T,0}$...			

Hodnoty ve sloupcích 0, 1, 2, ..., T uvedené tabulky odpovídají částkám, které jsou vypláceny v obdobích od vzniku pojistné události, tj. vznikla-li pojistná událost v období t+s, potom částka $x_{s,j}$, kde i splňuje $0 \leq j \leq T-s$ značí částku vyplacenou v období t+s+j.

Budeme předpokládat, že existují hodnoty a_j $j=0, 1, \dots, T$, y_i $i=0, 1, \dots, T$ takové, že teoretické hodnoty $x_{i,j} = y_i a_j$. Tento předpoklad nedává záruku jednoznačnosti hodnot y_i a_j , neboť teoretické hodnoty $x_{i,j}$ by mohly být vyjádřeny též vztahem

$$x_{i,j} = (k y_i) (a_j/k),$$

kde k je libovolná konstanta. Z tohoto důvodu se přidává dodatečný požadavek, aby hodnoty a_j $j=0, 1, \dots, T$ byly nezáporné a jejich součet byl roven jedné.

Naším úkolem je odhadnout hodnoty a_j , y_i . K tomu použijeme metody nejmenších čtverců. Po jejím vyřešení získané hodnoty upravíme tak, aby platily uvedené podmínky pro hodnoty a_j $j=0, 1, \dots, T$.

Budeme uvažovat výraz

$$F = \sum_{i=0}^T \sum_{j=0}^{T-i} (x_{i,j} - y_i a_j)^2 = \sum_{j=0}^T \sum_{i=0}^{T-j} (x_{i,j} - y_i a_j)^2.$$

Uvažujme libovolný přípustný sčítanec $s_{i,j} = (x_{i,j} - y_i a_j)^2$. Pro parciální derivace platí

$$[\partial s_{i,j} / \partial y_i] = -2 (x_{i,j} - y_i a_j) a_j$$

$$[\partial s_{i,j} / \partial a_j] = -2 (x_{i,j} - y_i a_j) y_i.$$

Výpočtem zjistíme

$$\frac{\partial F}{\partial a_j} = -2 \sum_{i=0}^{T-j} (x_{i,j} - y_i a_j) y_i, \quad \frac{\partial F}{\partial y_i} = -2 \sum_{j=0}^{T-i} (x_{i,j} - y_i a_j) a_j.$$

Položíme vypočtené derivace rovny nule. Dostaneme

$$\sum_{i=0}^{T-j} (x_{i,j} - y_i a_j) y_i = 0, \quad \sum_{j=0}^{T-i} (x_{i,j} - y_i a_j) a_j = 0.$$

Odtud dostaneme

$$a_j = \frac{\sum_{i=0}^{T-j} x_{i,j} y_i}{\sum_{i=0}^{T-j} y_i^2}, \quad y_i = \frac{\sum_{j=0}^{T-i} x_{i,j} a_j}{\sum_{j=0}^{T-i} a_j^2}.$$

Uvedenou soustavu vztahů řešíme iterační metodou. Vyjdeme z počáteční aproximace hodnot. Vyjdeme např. z počáteční aproximace hodnot $^{(0)}y_i$ $i=0,1,\dots,T$ a aplikujeme iteraci

$$^{(n)}a_j = \frac{\sum_{i=0}^{T-j} x_{i,j} ^{(n)}y_i}{\sum_{i=0}^{T-j} (^{(n)}y_i)^2}, \quad ^{(n+1)}y_i = \frac{\sum_{j=0}^{T-i} x_{i,j} ^{(n)}a_j}{\sum_{j=0}^{T-i} (^{(n)}a_j)^2}.$$

Po dosažení požadované přesnosti určíme hodnoty a_j tak, aby byly nezáporné a jejich součet byl roven jedné. Upravených hodnot a_j se použije k výpočtu hodnot y_i . Po získání hodnot a_j , y_i se provede rekonstrukce hodnot $x_{i,j}$ podle vztahu $x_{i,j} = y_i a_j$. Na základě rekonstruovaných hodnot se určí hledaná rezerva.

Literatura

Cipra T.: Pojistná matematika teorie a praxe, Ekopress 1999, str. 398

Mandl P. Mazurová L.: Matematické základy neživotního pojištění, Matfyzpress vydavatelství MMF UK, Praha 1999, str. 114

Sekerka B.: Matematické a statistické metody ve financování, cenných papírech a pojištění, Profess Consulting, Praha 2002, str.532