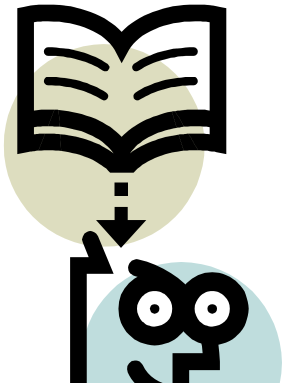
Soukromá vysoká škola ekonomických studií, spol. s r. o.
Lindnerova 575/1
180 00 Praha 8 – Libeň

****

Sborník konference

„Výuka matematiky na neuniverzitních vysokých školách“



Praha

28. 3. 2003

Schváleno rozhodnutím rektora čj. OS 185/2003
dne 5. dubna 2003

Neprodejné
Neprošlo jazykovou úpravou

Vytiskl UNIPRESS, spol. s r. o.
Svobodova 1431, 511 01 Turnov
ISBN 80-86744-03-5

Obsah:

Výňatek ze zahajovacího projevu rektora SVŠES

Miloslav Marek, rektor Soukromé vysoké školy ekonomických studií Praha

Dlouhá léta hledám odpověď na otázku, k čemu je potřebný vžitý rozsah výuky matematiky na středních školách všech typů a na vysokých školách, jejichž odborné zaměření není matematické. Démon „matematika“ vhání každoročně tisíce uchazečů o vysokoškolské vzdělání do oborů např. filozofických, právních, sociálních jen proto, že tam není matematika, nikoliv pro skutečný zájem a perspektivu uplatnění. Co s tím dělat? Jak lze situaci ovlivnit?

V roce 1990 jsem zpracovával vzdělávací program k podání žádosti o zařazení vytvořené soukromé školy do sítě škol. Do té doby jsem byl učitel a výchovný poradce na průmyslové škole v Praze a měl jsem za několik let zmapované nároky vysokých škol pro přijímací řízení. Z těchto nároků jsem formuloval obsah a cíle předmětu matematika pro První soukromou obchodní akademii. Státní střední ekonomické školy vyučovaly v té době matematiku v I. a II. ročníku převážně 3, nebo 4 + 2. Námi předložený projekt přijatý MŠMT byl zřetelně náročnější a vyvolával obavy, zda bude zvládnutelný.

V projektu v roce 1990 jsem zařadil matematiku do všech ročníků a to 4, 2, 2, 2 + volitelný seminář 2 hodiny. K exaktnějšímu oboru Zpracování dat 4, 3, 2, 2 + volitelný seminář. Ku podivu, matematika se nestala hrozbou a v roce 1996 ze 116 maturujících žáků jich bylo přijato na VŠ převážně s ekonomickým zaměřením dokonce 62%. Příčinu tohoto úspěchu vidím v dostatečném prostoru pro rozvoj matematického přemýšlení a v motivujícím přístupu učitelů, kterým se podařilo vysvětlit smysl matematiky, její úlohu v dotváření logického myšlení a tím i posílení schopnosti žáků překonávat potíže. V tom vidím mj. úlohu exaktní vědy – matematiky.

Z této zkušenosti vycházela koncepce studijních plánů matematiky a aplikované matematiky v rámci studijního programu „Ekonomika a management“ a nově předloženého studijního interdisciplinárního programu „Bezpečnost ekonomiky“. Avšak určit časový prostor a obsah matematiky a aplikované matematiky pro vysokou školu je mnohem těžší. Vyplývá ze zaměření každého studijního oboru a stupně vysokoškolského vzdělávání.

Matematika a aplikovaná matematika má v našich bakalářských studijních oborech dostačující prostor. Je otázkou, jak ho konkrétně vyplnit, jaké volit didaktické přístupy, jak podněcovat v rámci těchto disciplin tvůrčí myšlení studentů. Domnívám se, že před všemi učiteli matematických disciplín stojí velký filozofický problém, jehož vyřešení je nalezení „míry“. Míry kvantity a obsahu požadovaného učiva, míry náročnosti ve vztahu ke studovanému oboru, míry, která podněcuje dominující část volních vlastností k optimálnímu výkonu a dovednosti.

Jsem rád, že jsme v panu prof. Benešovi nalezli citlivého člověka, který pochopil záměry neuniverzitní školy a proto nezavrhl mé názory, ale naopak rozvinul je až do podoby dnešní konference.

Slovo úvodem

Viktor Beneš, vedoucí katedry matematiky a informačních technologií

Konference o matematice na vysokých školách neuniversitního typu byla uspořádána Katedrou matematiky a informačních technologií na Soukromé vysoké škole ekonomických studií, s.r.o. v Praze se dvěma základními cíli. Prvním byla diskuse o výuce matematiky na těchto školách zejména ekonomického zaměření, konkrétně řešení otázek, jak velký objem látky vykládat v základním kurzu matematiky a jak na něj navázat v dalších předmětech. Druhým cílem bylo získat představu o možnostech zapojení posluchačů těchto škol v aplikované matematice a statistice. Samozřejmě jako na každé odborné konferenci byly vítány též příspěvky z vlastní výzkumné činnosti přednášejících.

Celkem 21 účastníků z 11 institucí (z toho 5 soukromých a 4 státní vysoké školy) vytvořilo spolu s několika hosty (studenti a učitelé) dobrou atmosféru, myslím, že mohli být s organizací této jednodenní akce spokojeni. Konferenci otevřel rektor SVŠES Ing. Miloslav Marek a jeho úvodní slovo bylo již vlastním vyjádřením názoru k tématu konference. V dalším programu bylo 12 přednášek rozdělených na čtyři sekce. V první didaktické sekci se představili zástupci soukromých vysokých škol a právě zde se nejvíce přispělo k diskusi o objemu matematických předmětů v učebních plánech. Druhá sekce se týkala tvůrčí činnosti a vystoupil v ní také jediný zahraniční účastník ze Slovenska. Po polední přestávce následovaly dva odpolední bloky, kde nejprve vystoupili dva profesoři ze státních škol známí jako vědecké kapacity, po nich následovaly dva velmi pěkné studentské příspěvky a závěr obstarali svými přednáškami dva členové pořádající katedry. Konference byla charakteristická bohatými diskusemi k příspěvkům po jejich přednesení i o přestávkách.

Celá akce splnila svůj účel, ukázalo se, že vzájemné setkání vědecko-pedagogických pracovníků soukromých a státních škol může být přátelské a užitečné. Došlo k cenné výměně informací, která každému umožní dát alespoň částečnou odpověď na základní otázky formulované jako cíle konference.

Předložený sborník obsahuje abecedně, podle jmen autorů, seřazené příspěvky téměř všech přednášejících. Vznikl díky aktivitě informatické sekce pořádající katedry a vzhledem k jeho rychlému tisku se jej daří distribuovat účastníkům nedlouho po konferenci.

Matematika na soukromých vysokých školách – ano či ne ?

Josef Benda, Vladimír Beneš, Bankovní institut vysoká škola Praha

Úvod

Tento příspěvek je věnován problematice výuky matematiky na soukromých vysokých školách. Jeho cílem je upozornit na některé rozpory a problematické momenty, které se v souvislosti s výukou matematiky vyskytují, a naznačit určité možnosti jejich řešení.

Na základě poznatků získaných během čtyřletého působení v rámci bakalářského studijního programu (zahrnujícího též výuku matematicky orientovaných předmětů) na Bankovním institutu vysoké škole (dále jen BIVŠ) a dlouholetých zkušeností s výukou matematiky na veřejné vysoké škole (ČVUT) autoři formulují své názory na postavení a výuku těchto předmětů v rámci bakalářského studia, speciálně na soukromých vysokých školách. Chtějí tím přispět do širší diskuse o postavení a významu matematiky na vysokých školách neuniverzitního typu.

Postavení matematiky ve vysokoškolském studiu

Ve studijních programech ***veřejných vysokých škol*** (univerzitního typu) s technickým nebo ekonomickým zaměřením hraje matematika velmi významnou roli, což se projevuje zejména v prvních ročnících studia, do nichž je obvykle soustředěna naprostá většina matematických disciplin. Matematické předměty platí z hlediska studijních výsledků za nejobtížnější a lze je (zjednodušeně řečeno) považovat za jeden z významných důvodů úbytku studentů v prvním, případně i ve druhém ročníku studia.

Význam matematických předmětů ve výchově budoucího absolventa obvykle není zpochybňován, přesto však lze v delším časovém horizontu zaregistrovat snižování počtu hodin věnovaných výuce matematiky a z toho plynoucí redukci některých (zejména problematičtějších) partií. Tento proces je často spojován s představou zvýšení průchodnosti těchto předmětů, zkušenost však ukazuje, že tato představa je většinou spíše zbožným přáním. K omezení výuky matematických disciplin prakticky dochází zejména v souvislosti se zaváděním bakalářského (dvoustupňového) studia s tím, že některé matematické partie mohou být zařazeny do programu studia magisterského.

Soukromé vysoké školy se převážně orientují na bakalářské studium, některé již provozují nebo se chystají provozovat studium magisterské. I na těchto školách patří matematika (je-li zahrnuta do studijního programu) k nejobtížnějším předmětům. Tato skutečnost je způsobena několika faktory, mezi něž patří například:

- nízká úroveň matematických znalostí a schopnosti logického myšlení středoškoláků,
- na školy přichází řada posluchačů, kteří nebyli přijati na jiné školy (o které měli větší zájem) nebo se vzhledem k výsledkům svého středoškolského studia o přijetí na jiných školách ani neucházeli,
- posluchači přicházející z praxe mají většinou již velký časový odstup od střední školy (projevuje se zejména pokud vysoká škola realizuje kombinované studium).

Tyto faktory se samozřejmě ve větší či menší míře projevují rovněž na veřejných vysokých školách.

Soukromé vysoké školy nejsou příjemci státních dotací a jejich provoz je financován příjmovou stránkou jejich rozpočtu, která zahrnuje především platby studentů (školné), případně příjmy z jiných vzdělávacích aktivit, konzultační a poradenské činnosti apod. Z hlediska financování soukromé vysoké školy je úbytek studentů vysloveně nežádoucí.

Tato skutečnost vede k významnému rozporu – na jedné straně stojí ***ekonomický zájem školy*** (udržet si studenty), na druhé straně pak otázka ***kvality studia*** (objem vyložené látky, stupeň jejího zvládnutí, způsob prověřování znalostí). To se ostatně netýká pouze matematiky, ale všech předmětů studia.
V souvislosti s popsanou situací lze zformulovat několik otázek, se kterými je možno se v rámci (zejména bakalářského) studia na soukromých vysokých školách setkat:

1. Patří vůbec matematika do programu studia ?

2. Jaký má být cíl, obsah a rozsah předmětu ?

3. Jak má být matematika vyučována ?

4. K čemu bude student resp. budoucí absolvent matematiku potřebovat ?

Otázky č. 1 a 2 (které si klade vedení školy) úzce souvisejí s profilem absolventa bakalářského studia a odpověď na ně by měla být obsažena v žádosti o akreditaci studijního programu. Otázka č. 3 by měla být (alespoň částečně) zodpovězena rovněž v žádosti o akreditaci a odpověď detailně dopracována ve spolupráci vedení školy s příslušnou katedrou v období přípravy výuky předmětu.

Otázka č. 4 je relativně častou otázkou ze strany studentů, hlavně těch, kteří k matematice nepociťují zvláštní sympatie. Zejména studenti z praxe často argumentují tím, že při výkonu své profese matematiku „vůbec nepotřebují“. Dle našeho názoru by odpověď na tuto otázku měla být jasná vyučujícím, zatímco studenti by se k ní měli dopracovat v průběhu svého studia.

V dalším se pokusíme zformulovat odpovědi na výše uvedené otázky a naznačíme některé možnosti řešení dalších problematických momentů.

Zkušenosti z výuky matematických předmětů na BIVŠ

Bankovní institut vysoká škola zahájil své působení v oblasti vysokoškolského studia v akademickém roce 1999/2000 po získání akreditace pro bakalářský studijní obor Bankovní management v kombinované formě studia. Studijní plán tohoto oboru byl sestaven jako čtyřletý, přičemž první ročník studia byl tvořen předměty, které lze označit jako teoretický základ studia. Mezi ně patří ekonomie, psychologie, jazyková výuka a rovněž matematicky orientované předměty, jimž byl v objemu výuky věnován poměrně velký prostor – zhruba polovina přednáškových hodin. Sem lze zahrnout matematiku, finanční matematiku a statistiku a rovněž (alespoň částečně) výpočetní techniku. Další ročníky studia pak zahrnují odborné předměty, orientované na oblast bankovnictví, financí a managementu.

Při tvorbě studijního plánu byla samotné matematice přisouzena velmi významná pozice. Jako jeden z cílů předmětu, formulovaných v žádosti o akreditaci studijního oboru, bylo uvedeno:

„Na základě matematických metod a postupů pěstovat u posluchačů schopnost logického myšlení, orientace v problému, analýzy a syntézy faktů. Naučit posluchače cílevědomě využívat matematický aparát k řešení praktických úloh a problémů.“

Tato formulace dokumentuje postoj vedení školy k výuce matematiky i význam, který tomuto předmětu přisuzuje. Dává rovněž základní odpověď na výše zformulovanou otázku č. 4. Jsme přesvědčeni, že uvedené schopnosti a znalosti by měly patřit k základnímu vybavení bankovního (či jiného) manažera, jehož každodenním úkolem je posuzování konkrétní situace, rozhodování o řešení problémů a řízení pracovního kolektivu.

Jako pozitivní skutečnost lze hodnotit rovněž paralelní zařazení výkladu alespoň základních pojmů z oblasti finanční matematiky a statistiky do programu prvního ročníku studia. Tato partie doplňuje výklad teoretických pojmů a postupů obsažených v matematice a ilustruje využití některých matematických pojmů i v oblasti nikoli pouze teoretické (matematické).

Model prvního ročníku studia jako teoretického základu, na který od druhého ročníku navazují odborné předměty, byl použit rovněž při tvorbě studijních plánů dalších oborů, akreditovaných v následujících letech (Informační technologie, Elektronické obchodování, Pojišťovnictví a Oceňování majetku), a to i pro prezenční studium. Výjimkou je pouze studijní obor Právní administrativa v podnikatelské sféře, akreditovaný v roce 2002, který je od samého počátku orientován na předměty ekonomického, právního a manažerského charakteru.

Na základě zkušeností z bakalářského studia došlo v programu prvního ročníku studia postupně k některým úpravám, které pozici matematicky orientovaných předmětů ještě poněkud posílily. V současné době zahrnuje program 1. ročníku prezenčního bakalářského studia výše uvedené předměty v rozsahu:

- ***Matematika*** – 3 hodiny přednášek a 2 hodiny cvičení týdně, 2 semestry, v každém semestru zápočet, zkouška v závěru ročníku,
- ***Statistika*** – 2 hodiny přednášek a 2 hodiny cvičení týdně, 1 semestr, klasifikovaný zápočet,
- ***Finanční matematika*** – 2 hodiny přednášek a 2 hodiny cvičení týdně, 1 semestr, zápočet a zkouška.

V programu 1. ročníku kombinovaného studia mají tyto předměty rozsah:

- ***Matematika*** – celkem 24 hodin přednášek, 2 semestry, zkouška v závěru ročníku,
- ***Statistika*** – celkem 8 hodin přednášek, 1 semestr, klasifikovaný zápočet,
- ***Finanční matematika*** – celkem 8 hodin přednášek, 1 semestr, zkouška.

Zabývejme se nyní obsahem předmětu Matematika vyučovaného na BIVŠ a způsobem jeho výuky a prověřování znalostí.

Při tvorbě studijního plánu předmětu jsme jako východisko použili program výuky matematiky v 1. ročníku technických vysokých škol (konkrétně FS ČVUT). Vzhledem k rozsahu výuky předmětu, předpokládané úrovni vstupních znalostí posluchačů a s ohledem na to, že se jedná o studium bakalářského typu, bylo zvažováno zařazení jednotlivých partií předmětu a předpokládaný stupeň jejich zvládnutí.

V současné době zahrnuje program předmětu Matematika „klasické“ partie, které považujeme za standardní základ – konkrétně lineární algebru a základy matematické analýzy reálných funkcí jedné reálné proměnné. ***V lineární algebře*** se probírají základy teorie vektorových prostorů (s důrazem na *n*-rozměrné aritmetické vektory), matice a determinanty a přímé metody řešení soustav lineárních rovnic. ***Matematická analýza*** zahrnuje posloupnosti reálných čísel, diferenciální počet reálných funkcí jedné reálné proměnné a základy počtu integrálního.

Program předmětu je shodný pro prezenční i kombinovanou formu studia, pouze s tím rozdílem, že v kombinované formě se neprobírá (zejména z důvodů časových) určitý integrál.

Při tvorbě studijního plánu se vycházelo z představy nezatěžovat posluchače přemírou pojmů (definic) a vět, ale soustředit se na základní pojmy a postupy. Z tohoto důvodu byly rovněž po zkušenostech z prvního běhu bakalářského studia z programu předmětu vypuštěny některé dílčí partie, které nebylo možno podrobněji rozvést a ilustrovat jejich užitečnost. Jedná se například o pojem vlastních čísel a vlastních vektorů matic, aproximaci funkce Taylorovým mnohočlenem nebo obecné poznatky o rovinných křivkách.

Naproti tomu je poměrně velká pozornost věnována metodám řešení soustav lineárních rovnic (speciálně Gaussově eliminační metodě) a souvisejícím pojmům z teorie matic (v lineární algebře), v matematické analýze považujeme za klíčové pojmy limity a derivace včetně jejich využití při vyšetřování průběhu funkcí.

Důraz je kladen na podrobné vysvětlení důležitých pojmů a postupů (zejména formou ilustrativních příkladů), matematické věty jsou uváděny většinou bez důkazů, pouze v některých případech je prováděno odvození s cílem zdůraznit souvislosti mezi jednotlivými pojmy a postupy a naznačit obvyklé způsoby matematického uvažování.

Posluchače se snažíme vést nikoli k mechanickému zapamatování a následné reprodukci vyložených poznatků, ale na pochopení vnitřní logiky předmětu a vzájemných souvislostí. Za vhodné považujeme ilustrovat některé složitější teoretické pojmy analogií s pojmy a postupy všeobecně známými – například pojem inverzní matice přiblížit připomenutím převrácené hodnoty reálného čísla x, přičemž podmínka $x \neq 0$ je zastoupena požadavkem regularity matice resp. nenulového determinantu a reálná hodnota 1 jednotkovou maticí.

Je samozřejmé, že tento způsob výuky předmětu je snadněji realizovatelný v prezenční formě studia, kde je k dispozici cvičení, zatímco kombinovaná forma studia, kde je výklad veden v zásadě pouze formou přednášek, je z tohoto hlediska podstatně náročnější jak pro vyučující tak pro posluchače. Zejména pro studenty s větším časovým odstupem od střední školy (studenty z praxe) a pro absolventy středních škol, kde matematika nepatří k profilovým předmětům, může být tato forma studia dosti obtížná a zvládnutí předmětu vyžaduje vynaložení poměrně velkého individuálního úsilí. Pro snadnější zvládnutí předmětu je do programu 1. ročníku kombinovaného studia zařazen volitelný seminář z matematiky, o kterém se ještě zmíníme dále.

Uvedené zásady uplatňované v procesu výuky se snažíme dodržovat rovněž při prověřování znalostí studentů při zkouškách. Domníváme se, že studenti by měli prokázat zvládnutí základních pojmů a postupů i schopnost logické orientace v tématice. Podle našeho názoru by při posuzování rozporu „ekonomický zájem školy versus kvalita výuky (znalostí)“ – viz předchozí odstavec – nemělo hrát hlavní roli (okamžité) ekonomické hledisko, ale spíše (dlouhodobý) zájem produkovat kvalitní absolventy (budoucí vedoucí pracovníky) a budovat dobré jméno školy jako kvalitní vzdělávací instituce.

Podpora výuky matematiky na BIVŠ

Již jsme se zmínili o obtížnosti matematiky pro značné procento posluchačů soukromých (a rovněž veřejných) vysokých škol i o příčinách tohoto stavu. Ani Bankovní institut vysoká škola není v tomto směru výjimkou. Aby bylo možné udržet určitý standard výuky a solidní úroveň matematických znalostí posluchačů, využívá škola různých podpůrných prostředků pro snadnější zvládnutí předmětu ze strany studentů. Zde uvedeme dvě možnosti, které škola běžně využívá a které se v této souvislosti dle našeho názoru osvědčily.

Opakovací kurz středoškolské matematiky

Vzhledem k postavení matematiky v systému bakalářského studia na BIVŠ není překvapivé, že matematika představuje jeden z předmětů přijímacích zkoušek (s výjimkou oboru Právní administrativa). Tato skutečnost vyvolává u zájemců o studium časté obavy (mnohdy plně oprávněné) a řada dotazů potenciálních uchazečů o studium je orientována právě tímto směrem.

Pro usnadnění vstupu na školu a pomoc zájemcům o studium v přípravě k přijímacím zkouškám organizuje škola každoročně na jaře opakovací kurzy středoškolské matematiky. Jejich cílem je shrnout a utřídit matematické znalosti, které by budoucí studenti BIVŠ měli ovládat, a tím i usnadnit pozdější zvládnutí matematiky v průběhu studia.

Opakovací kurz matematiky probíhá ve dvou formách:

- ***prezenční forma*** kurzu v rozsahu 30 výukových hodin, kurz probíhá 1x týdně obvykle po dobu 10 týdnů, ve večerních hodinách,
- ***korespondenční forma*** kurzu, kde účastník postupně obdrží celkem cca 100 typických úloh ze středoškolské matematiky, které po vyřešení zasílá ke kontrole a případné opravě.

Prezenční formu kurzu volí obvykle čerství absolventi středních škol příp. středoškoláci před maturitou, korespondenční formě dávají přednost spíše starší nebo zaměstnaní uchazeči o bakalářské studium.

Matematický seminář

Tento seminář je zařazen do studijního programu bakalářského studia 1. ročníku jako volitelný předmět pro posluchače kombinované formy studia. Jak jsme již konstatovali výše, je kombinovaná forma pro řadu posluchačů značně náročná (zvláště vzhledem k omezenému prostoru pro výuku a absenci cvičení), a seminář by měl chybějící cvičení alespoň částečně nahradit.

Cílem semináře není rozšiřování objemu výuky z přednášek o další partie, pojmy nebo postupy, ale doplnění přednesené látky o další komentáře, vysvětlení a ilustrativní příklady. Z tohoto pohledu lze předpokládat (a skutečnost to potvrzuje), že značná část semináře je vedena v podstatě formou přednášky, je zde však prostor i pro konkrétní dotazy nebo připomínky posluchačů. (Velmi podobně je organizován rovněž matematický seminář např. pro studenty 1. ročníku studia na FS ČVUT, ovšem pro prezenční formu studia – jako další doplněk přednášek a cvičení.)

Matematický seminář na BIVŠ je zařazen do programu letního semestru studia v celkovém rozsahu 16 hodin výuky, což vzhledem k rozsahu výuky samotné matematiky (24 hodin přednášek v ročníku) představuje významný nárůst.

Výsledky hodnocení z matematiky na BIVŠ

V závěru tohoto odstavce uvedeme několik údajů ilustrujících úspěšnost studentů 1. ročníku bakalářského studia BIVŠ při zkouškách z matematiky. Uvádíme zde výsledky dosažené v akademickém roce 2000/2001 a v roce následujícím (2001/2002).

V tabulce uvádíme vždy počet studentů, kteří nastoupili do 1. ročníku studia, úbytek studentů v průběhu akademického roku (z důvodu přerušení nebo ukončení studia nebo pro nesplnění podmínek pro postup do dalšího ročníku), počet studentů, kteří se zapsali do dalšího ročníku studia, a z nich počet studentů, kteří úspěšně složili zkoušku z matematiky.

Z uvedených údajů je patrné, že i navzdory snahám o podporu výuky matematiky výše uvedenými prostředky zůstává matematika i nadále pro studenty obtížným předmětem. Úspěšnost studentů prezenční i kombinované formy studia při zkoušce z matematiky je srovnatelná. Lze konstatovat, že studijní úspěšnost v matematice je v porovnání s ostatními předměty studia (včetně odborných předmětů ve vyšších ročnících) jednoznačně nejnižší.

Tabulka: Studijní výsledky z matematiky na BIVŠ

Posluchači	zapsáno do 1. ročníku	úbytek za 1. ročník	zapsáno do vyššího ročníku	z toho zkoušku složilo
akad. rok 2000/2001				
kombinovaná forma	152	34	118	75 (64%)
akad. rok 2001/2002				
prezenční forma	56	9	47	33 (70%)
kombinovaná forma	142	35	107	79 (74%)

Pro zajímavost ještě doplňme, že např. v akademickém roce 2001/2002 absolvovalo seminář z matematiky celkem 70 studentů kombinované formy studia (tedy zhruba polovina všech studentů této formy), z nichž zkoušku úspěšně složilo 55 posluchačů, tedy 79%.

Závěr

Předloženým příspěvkem jsme se pokusili přispět do diskuse o výuce matematiky na vysokých školách neuniverzitního typu. Na základě našich zkušeností jsme přesvědčeni, že matematika má své místo například v ekonomicky orientovaných studijních programech těchto škol, a to i v programech bakalářského studia.

Zároveň je však třeba mít na paměti řadu úskalí a otázek, které se v souvislosti s výukou matematiky vyskytují. Některé z těchto otázek zde byly zformulovány a pokusili jsme se rovněž naznačit možné odpovědi. Domníváme se, že problematika výuky matematiky a obecně i dalších teoretických předmětů zasluhuje trvalou pozornost jak ze strany vyučujících, tak i vedoucích představitelů neuniverzitních (soukromých) vysokých škol. Je ve vlastním zájmu těchto škol se těmito otázkami zabývat, pokud chtějí potenciálním studentům nabídnout plnohodnotné vysokoškolské studium a tím úspěšně konkurovat veřejným vysokým školám.

Reference

Žádost o akreditaci bakalářského studijního programu Bankovnictví, obor Bankovní management. Bankovní institut, a.s., Praha, 1999.

Zpráva o vlastním hodnocení Bankovního institutu vysoké školy v Praze. Praha, únor 2003.

Tvůrčí činnost v aplikované matematice studentů na úrovni soukromých vysokých škol

Viktor Beneš, Soukromá vysoká škola ekonomických studií Praha

1. Úvod

Jedním z důležitých aspektů práce soukromých vysokých škol je tvůrčí činnost. Rozdíl mezi tvůrčí a vědeckou činností je zřejmý, vědecká práce je zaměřena na dosažení nových výsledků ve výzkumu, zpravidla původních ve světovém měřítku. Je tedy vědecká činnost podmnožinou tvůrčí činnosti, tvůrčí práci chápeme mnohem šíře, jako odborné působení s výsledkem, který vede k užitku např. na daném pracovišti, a není možné nebo výhodné ho realizovat jinak.

Na vysokých školách se tvůrčí činností zabývají vědecko-pedagogičtí pracovníci a pod jejich vedením též studenti. Typickým příkladem zapojení zejména postgraduálních studentů (doktorandů) je jejich účast na řešení výzkumných grantů podporovaných zahraničními a domácími grantovými agenturami. Vysoké školy neuniversitního typu nejsou určeny pro doktorské studium, některé z nich nemají ani magisterské studium, jejich cílem je výchova a vzdělávání bakalářů.

Ukazuje se, že i posluchače těchto škol je možné zapojit do tvůrčí činnosti. Na Soukromé vysoké škole ekonomických studií, s.r.o. (SVŠES) vypisuje rektor granty na podporu tvůrčí činnosti, pod vedením učitelů na nich participují studenti. Jedná se např. o projekty v oblasti informačních technologií, účetnictví či managementu a marketingu. Jiná témata tvůrčí činnosti se zabývají didaktikou resp. srovnáváním studijních plánů. Schopnost studentů podílet se na řešení je umožněna tím, že odborná náplň tématu nepřesahuje výrazně jejich znalosti a nové poznatky jsou schopni zvládnout. Zde se daří podchytit i posluchače nižších ročníků, kteří tak pracují nad rámec svých studijních povinností ještě před zadáním závěrečné práce.

V předloženém příspěvku je diskutována možnost zapojení posluchačů bakalářského studia do tvůrčí činnosti v aplikované matematice a statistice. Zde je situace obtížnější, neboť matematika není nosným oborem a přitom potřebné základy jsou velmi široké. Studium vysokoškolské matematiky se omezuje zpravidla na jeden ročník s nízkou hodinovou dotací, podobně tomu je ve statistice. V dalším textu bude zhodnocena zkušenost autora v oblasti vedení tvůrčí činnosti a navrženy podmínky, za kterých by se uplatnění studentů v aplikované matematice zlepšilo.

2. Zkušenosti s tvůrčí činností studentů

Od roku 1993, kdy začala působit Grantová agentura České republiky (GAČR), jsem během svého působení na ČVUT a UK řešil přibližně deset grantů a systematicky zapojoval studenty do prací na těchto projektech. Vybrané publikace vzniklé během řešení jsou v seznamu literatury [1]-[10], převážně patří do oblasti stereologie, stochastické geometrie a prostorové statistiky. Cílem bylo vyvíjet metodiku stochastického modelování a statistického hodnocení trojrozměrných geometrických struktur. Tyto metody byly aplikovány v materiálovém výzkumu a biomedicíně, kde strukturní parametry se korelují se zkoumanými vlastnostmi, např. mechanickými.

Obtížnost úkolů svěřených studentům byla odstupňována podle jejich stáří: doktorandi v rámci své doktorské práce vyvíjeli teoretické nástroje, posluchači magisterského studia byli více zapojeni v aplikacích. Dále nebudu hovořit o studentech Matematicko-fyzikální fakulty UK a Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT, kteří jsou zaměřeni na matematiku. Jejich vzdělání z nich dělá ideální spolupracovníky pro vědce-matematika a mohou řešit i hlubší problémy.

Během několikaletého zaměstnání na Strojní fakultě ČVUT, kde katedra technické matematiky již nebyla nosnou, tj. neměla vlastní obor zakončený diplomovou prací, jsem působil na studenty nižších ročníků, což je již problematika příbuzná neuniverzitním vysokým školám. Hodinová dotace matematiky v prvních dvou letech zde byla ovšem vyšší, ale především tu byl v druhém ročníku předmět numerická matematika, který v návaznosti na nabyté schopnosti ovládání počítače, základy algoritmizace a programování umožňoval zvládnout numerické výpočty v matematice i statistice. Tyto výpočty doprovázely tvorbu nových metod a byly nezbytné pro jejich testování či simulaci.

Dostali jsme se k základnímu poznatku: posluchače nižších ročníků vysokých škol lze zapojit do tvůrčí práce v aplikované matematice zejména k provádění numerických výpočtů na počítači.

3. Software vlastní a standardní

Setkávám se s názorem, že počítač má pracovat kompletně za nás. V aplikované matematice to vždycky neplatí. Existuje sice řada softwarových balíků programů, které zdánlivě zvládnou každou metodu, ať již ve statistice, numerické matematice či optimalizaci. Matematik ovšem velmi často musí opustit rutinní metody, buď je alespoň modifikovat, nebo vytvářet metody zcela nové. Tak se dostane do situace, že nenajde komerční software, který by jeho výpočet realizoval. A nemusí jít jen o nové metody, jak ukazuje následující elementární příklad z matematické statistiky.

V mnohorozměrné statistické analýze se často aplikuje úloha porovnání náhodných bloků. Jedná se např. o situaci, kdy na n jedincích je v k časových okamžicích měřena určitá fyziologická veličina (při měnících se podmínkách). Nulová hypotéza, kterou chceme testovat, říká, že hodnota veličiny nezávisí na měnících se podmínkách, tj. nemění se v čase. Standardní balíky statistických programů (např. SPSS) nabízejí klasický neparametrický test Friedmanův, kdy se pro každého i-tého jedince zvlášť určí pořadí Rij hodnot veličiny v čase a vypočte se testová statistika Q

$$Q=12/nk(k+1)\ \Sigma_j\ (\Sigma_i\ R_{ij})^2 - 3n(k+1)$$

Nulovou hypotézu zamítáme, když Q překročí kriticku hodnotu (na hladině významnosti α). Při větších rozsazích n se za kritickou hodnotu bere jako aproximace α-kvantil rozdělení chí-kvadrát s k-1 stupni volnosti. V práci [11] je uveden ještě jiný test pro tuto situaci, nazývaný Andersonův-Kannemannův. Zde se sestaví matice D, jejíž prvky Djm udávají počet jedinců, u kterých hodnota veličiny j dostala pořadí m. Testová statistika má potom tvar

$$\chi^2 = (k-1)/n\ \ \Sigma_j\ \Sigma_m\ (D_{jm} - n/k)^2$$

za platnosti nulové hypotézy má tato statistika asymptoticky rozdělení chí-kvadrát s $(k-1)^2$ stupni volnosti. Andersonův-Kannemannův test je citlivější proti větší třídě alternativ než Friedmanův test. Proto zasluhuje pozornost a přednost při užívání. Ovšem tento test se již ve statistických programových balících nenachází. Pro použití je třeba jej naprogramovat, což představuje jednoduchý algoritmus. Pro posluchače bez základních znalostí to ovšem může být velký problém.

4. Tvůrčí činnost v aplikované matematice na SVŠES

Působím na této škole prvním rokem, učím převážně základní kurs matematiky. Mezi posluchači, kteří zvládají výborně matematiku, se snažím hledat adepty pro spolupráci. Studenti dobří v matematice mají většinou celkově výborný prospěch a přednostně se mohou věnovat tvůrčí činnosti v nosném oboru svého studia, účetnictví nebo marketingu a managementu. Na této konferenci vystupuje jeden student pod mým vedením s příspěvkem z kvantitativního marketingu [12]. V této práci jsou dána data z prodeje farmaceutických přípravků a z propagačních aktivit. Jedná se o čtvrtletní časové řady. Podle daného vzorce se vypočte celková propagační aktivita a ta se koreluje s prodejem. Výsledky se srovnávají pro různé přípravky. Data jsou manipulována v EXCELu, autor byl seznámen s tímto produktem v předmětu Základy výpočetní techniky. Tento systém zde umožňuje grafické znázornění časových řad, výpočet vzájemné korelační funkce a rozklad na trend, sezónní složku a reziduum. Provedená analýza je jednoduchá a použití EXCELu k ní stačí. Pokud by měla být analýza prohloubena (podrobnějším studiem daných časových řad, např. reziduí v jejich rozkladu), muselo by se přejít na pokročilejší software, což vyžaduje znalosti nad rámec studia. Při dlouhodobé spolupráci se zadavatelem by ani toto nestačilo a klíčem k řešení by byl software budovaný vlastními silami, takový, aby bylo postupně možné přidávat nové moduly.

Zde jsme dospěli k základnímu problému pro tvůrčí činnost v aplikované matematice: pro pokročilé numerické výpočty (matematika, statistika, optimalizace) jsou nutné schopnosti algoritmizace a programování na počítači, které však nejsou součástí výuky. Základy výpočetní techniky představují kurs počítačové gramotnosti v rozsahu přípravy na zkoušku pro získání mezinárodně uznávaného certifikátu ECDL (European Computer Driving Licence) a další vzdělávání je též zaměřeno na hotové produkty a technické zázemí (např. počítačové sítě). Vzpomínám, jak v práci [3] posluchač prvního ročníku Strojní fakulty ČVUT naprogramoval složitou modifikaci jedné stereologické metody a testoval ji nejprve na simulovaných a potom na reálných datech. S výsledky potom úspěšně vystoupil na mezinárodní studentské soutěži v Kodani při stereologickém kongresu. Samozřejmě, způsob vzdělávání na technických a ekonomických školách je odlišný, ale podle mého názoru algoritmizace patří do všeobecného základního vzdělání na všech vysokých školách, kde se vyučuje matematika. Základy výpočetní techniky by měly být sjednoceny již na úrovni středních škol.

5. Závěr

V příspěvku jsou shrnuty zkušenosti autora s vedením studentů k tvůrčí činnosti v aplikované matematice. Je srovnáno dřívější a současné působení na universitách se začínajícím působením na vysoké škole neuniverzitního typu. Jedná se především o zapojení posluchačů prvních ročníků bakalářského studia nad rámec běžných studijních povinností. Je známo, že takové zapojení je možné a všeobecně žádoucí. Různé obory však mají v tomto ohledu svá specifika. Aplikovaná matematika patří mezi náročnější obory, které navíc nejsou nosné pro dané zaměření studia (např. ekonomické). Tvůrčí činnost v aplikované matematice ovšem zlepšuje logické myšlení a pěstuje systematičnost v práci. Větší rozšíření takové činnosti vyžaduje určité podmínky, které se zdají být přirozené:

Sjednotit výuku základů výpočetní techniky na středních školách tak, aby se jejich vyučování nemuselo opakovat na vysoké škole.

Zavést do všeobecné části studia na vysoké škole (kde se vyučuje matematika) základy algoritmizace a programování.

Uvedená opatření by zkvalitnila vzdělávací proces a byla podporou nejen pro matematiky. V aplikované matematice umožní zapojit studenty formou numerických výpočtů nejen s užitím standardního software, ale tvůrčími postupy modifikace a budování vlastního programového vybavení. Bude jen na učitelích matematiky, jak využijí této možnosti k rozvoji a docenění své disciplíny, ke zvýšení prestiže matematiky mezi posluchači.

Literatura

[1] Beneš V., Postler M. (1993) On anisotropic systems of dislocation lines. Proc. First Formu of Young European Scientists. Liege, 19-24.
[2] Mutl M., Sedlák R., Kočík J., Keilová E., Beneš V. (1994) Quantitative analysis of dislocation substructures. Acta Stereol. 13/2, 479-484.
[3] Petr M., Slámová M., Beneš V., Ohser J., Vogel M. (1996) Damage initiation in composites containing platelike particles. Acta Stereol. 15/3, 227-232.
[4] Krejčíř P., Beneš V. (1997) Stereological analysis of spatial surface processes. J. Microscopy 186/2, 185-197.
[5] Beneš V., Jiruše M., Slámová M. (1997) Unfolding the trivariate size-shape-orientation distribution of spheroidal particles with application. Acta Materialia 45/3, 1105-1113.
[6] Šimák J., Beneš V. (1998) Simulation of random fibre processes. Prague Stochastics 98, Hušková et al. Eds., 21-25.
[7] Beneš V., Rataj J., Krejčíř P., Ohser J. (1999) Projection measures and estimation variances of intensities. Statistics 32/4, 369-93.
[8] Hlawiczková M., Gokhale A., Beneš V. (2001) Bias of a length density estimator based on vertical projections. J. Microscopy 204/3, 226-231.
[9] Nachtigal P., Semecký V., Gojová A., Kopecký M., Beneš V., Jůzková R. (2002) The application of stereological methods for the quantitative analysis of the atherosclerotic lesions in rabbits. Image Anal. & Stereol. 21/3, 165-174.

[10] Beneš V., Bodlák K., Moeller J., Waagepetersen R. (2002) Bayesian analysis of log Gaussian Cox processes for disease mapping. Res. Report R-02-2001, Aalborg University.
[11] Anděl J. (2002) Základy matematické statistiky. Preprint, MFF UK Praha.
[12] Buzek M.(2003) Kvantitativní hodnocení propagačních aktivit v prodeji farmaceutických přípravků. Sborník Konference o matematice na vysokých školách neuniverzitního typu. SVŠES, Praha.

Koncepce výuky matematiky na Vysoké škole finanční a správní

Petr Budínský, vysoká škola finanční a správní Praha

Vysoká škola finanční a správní (dále jen „VŠFS") zahájila výuku v akademickém roce 2000/01 s přibližně 330 studenty. V akademickém roce 2001/02 studovalo na VŠFS zhruba 750 studentů a v letošním akademickém roce je to již téměř 1250 studentů. Převažuje kombinovaná forma studia - poměr mezi studenty kombinovaného a prezenčního studia je přibližně 2:1. Všichni studenti absolvovali výuku matematiky v 1. ročníku, nicméně je třeba říci, že se postupně měnil jak rozsah, tak i obsah výuky.

Na VŠFS přicházejí totiž v rámci kombinovaného studia lidé, kteří se nesetkali s matematikou několik let, případně lidé, kteří matematiku nikdy hlouběji nestudovali. Podobná situace je u studentů prezenčního studia – někteří z nich přicházejí z obchodních akademií, případně učilišť, kde nedostanou dostatečné základy matematiky. Na VŠFS probíhala tedy diskuse, jakým způsobem matematiku vyučovat. V zásadě šlo o dva možné přístupy:

1. vyučovat jenom jakousi základní matematiku,
2. vyučovat matematiku srovnatelně např. s VŠE.

Postupně převážil přístup 2., nicméně s následujícími parametry:

a) je třeba umožnit všem studentům, aby se dostali na srovnatelnou úroveň, co se týče základů matematiky, a dále se jim věnovat v průběhu akademického roku. Za tím účelem pořádá VŠFS kromě normálních konzultací též
   - přípravné kurzy (před přijetím na VŠFS)
   - oživovací kurzy (po přijetí na VŠFS před zahájením výuky)
   - prohlubovací kurzy (v průběhu semestru hlavně pro studenty kombinované formy studia),

b) je třeba rozlišit výuku matematiky podle oborů, které studenti studují – není tedy jedna matematika pro všechny. Stejný přístup je též u statistiky, kterou mají opět všichni studenti, ale diferencovaně podle oboru, který studují.

Na VŠFS jsou v rámci bakalářského studia akreditovány následující obory:

- Bankovnictví
- Pojišťovnictví
- Řízení podniku a podnikové finance
- Veřejné finance
- Veřejná správa
- Aplikovaná informatika

V rámci magisterského studia, které se připravuje, bude VŠFS nabízet obory:

- Řízení podniku a podnikové finance
- Veřejná správa
- Finance a finanční služby

Příspěvek přednesený na konferenci se týká pouze bakalářského studia a všech „matematických“ předmětů zde vyučovaných. Tyto předměty garantuje katedra matematiky a informatiky, přičemž se jedná o předměty:

- Matematika A, Matematika B, Matematika C
- Pravděpodobnost a statistika
- Ekonomická statistika A, Ekonomická statistika B
- Demografie
- Finanční matematika
- Investiční matematika
- Pojistná matematika
- Matematické modelování v investičním bankovnictví

Tyto předměty jsou v jednotlivých oborech vyučovány následovně:

I. Obor – Aplikovaná informatika

Matematika A

- dvousemestrální předmět v 1. ročníku
- hodinová dotace 2+2 v každém semestru
- zakončení zkouškou
- lineární algebra, diferenciální počet I.,II., integrální počet I.,II.

Pravděpodobnost a statistika

- dvousemestrální předmět v 2. ročníku
- hodinová dotace 2+1 v každém semestru
- zakončení zkouškou
- teorie pravděpodobnosti, statistika

II. Obory – Bankovnictví, Pojišťovnictví, Řízení podniku a podnikové finance, Veřejné finance

Matematika B

- dvousemestrální předmět v 1. ročníku
- hodinová dotace 2+1, resp. 2+2 v zimním, resp. letním semestru
- zakončení zkouškou
- lineární algebra, diferenciální počet I., integrální počet I.

Ekonomická statistika A

- dvousemestrální předmět v 2. ročníku
- hodinová dotace 1+1 v každém semestru
- zakončení klasifikovaným zápočtem
- základy pravděpodobnosti, aplikace statistiky v ekonomii

Finanční matematika

- jednosemestrální předmět v 2. ročníku
- hodinová dotace 1+1
- zakončení zkouškou
- úročení, výpočet výnosu dluhopisů, durace, výnosová a forwardová křivka

Investiční matematika (s výjimkou oboru Pojišťovnictví)

- jednosemestrální předmět v 2. ročníku

- hodinová dotace 1+1
- zakončení klasifikovaným zápočtem
- výnos dluhopisového a akciového portfolia, zajištění akciového portfolia pomocí derivátů

Pojistná matematika (pouze obor Pojišťovnictví)

- jednosemestrální předmět v 2. ročníku
- hodinová dotace 1+1
- zakončení klasifikovaným zápočtem
- výpočet pojistného v pojištění osob a majetku, matematické modelování zajištění

Matematické modelování v investičním bankovnictví (pouze obor Bankovnictví)

- jednosemestrální předmět v 3. ročníku
- hodinová dotace 1+1
- zakončení klasifikovaným zkouškou
- matematické modely ve fundamentální analýze, v oceňování derivátů a v teorii portfolia

III. Obor – Veřejná správa

Matematika C

- jednosemestrální předmět v 1. ročníku
- hodinová dotace 1+1
- zakončení zkouškou
- lineární algebra, diferenciální počet I.

Ekonomická statistika B

- jednosemestrální předmět v 2. ročníku
- hodinová dotace 1+1
- zakončení klasifikovaným zápočtem
- ekonomická statistika

Základy demografie

- jednosemestrální předmět v 2. ročníku
- hodinová dotace 2+0
- zakončení klasifikovaným zápočtem
- demografie

Z výše uvedeného je zřejmé, že „matematické“ předměty jsou na VŠFS silně zastoupeny a že matematika má obecně silné postavení. Aby byla ovšem celá koncepce úspěšná, je nutný individuální přístup pedagogů ke studentům. Domníváme se, že právě individuální přístup je je dnou z našich nejsilnějších zbraní.

Hodnocení závislosti prodeje farmaceutických přípravků na propagačních aktivitách

Michal Buzek, Soukromá vysoká škola ekonomických studií Praha

I. Úvod

Příspěvek obsahuje výsledky kvantitativního hodnocení propagačních aktivit v prodeji farmaceutických přípravků. Tato problematika je velice důležitá pro většinu firem.Úlohou marketingových pracovníků každé firmy je odhalit nově vznikající podnikatelské příležitosti, zhodnotit jejich výhodnost pro firmu a navrhnout alternativy postupu k jejich získání. Soubor činností, zabývajících se tímto úkolem je označován pojmem marketingový výzkum.

Součástí marketingového výzkumu je kvantitativní marketing, který využívá matematických a statistických metod ke zpracování dat z marketingových průzkumů.

Cílem předložené studie je vyhodnocení časových řad prodeje a propagačních aktivit na základě dat poskytnutých farmaceutickou firmou. V následující sekci je obsažen popis dat odpovídající jednotlivým přípravkům. Sekce III. je zaměřena na popis kvantitativních metod, které se během práce používaly. Další sekce obsahuje numerické výsledky získané užitím programu EXCEL včetně grafických příloh. V závěru je snahou interpretovat dosažené výsledky.

II. Popis dat

Od firmy Cegedim byly obdrženy soubory dat pro dvě skupiny přípravků, které se dále značí A a B.

Soubor A obsahuje skupinu čtyři přípravky: Claritin, Flonidan, Zyrtec a Zodac. Uvedené přípravky jsou antihistaminika, používají se na léčbu alergií, jsou sezónní, a proto se nejvíce prodávají na jaře a v létě.

Claritin se používá na léčbu senné rýmy, chronických alergií. Obsahuje účinnou látku loratadinum.

Flonidan se mimo chronické sezónní a nesezónní alergie používá také na léčení atopiských ekzemů a astma bronchiale. Účinná látka je taktéž loratadinum. Flonidan je přímý konkurent ke Claritinu.

Zyrtec pomáhá k léčbě sezónních i celoročních alergií. Obsahuje účinnou látku cetirizini dihydrochloridum.

Zodac je přímý konkurent k Zyrtecu. Používá se ke stejné léčbě jako Zyrtec a obsahuje stejnou účinnou látku.

Soubor B obsahuje skupinu šesti přípravků: Betaloc, Dilatrend, Lokren, Sectral, Tenormin, Vasocardin. Tyto přípravky jsou kardiologické betablokatory.
Betaloc léčí poruchy srdečního rytmu a infarkt myokardu. Obsahuje účinnou látku metoproloi tartras.

Dilatrend je používán k léčení arteriální hypertenze a obsahuje účinnou látku carvedilolum.

Lokren používá se k léčbě arteriální hypertenze a je v něm obsažena účinná látka betaxololi hydrochloridum.

Sectral léčí hypertenze, ischemickou poruchu srdeční. Obsahuje účinnou látkuacebutololi hydrochloridum.

Tenormin je používán k léčbě akutního infarktu myokardu, srdeční arytmetie a obsahuje účinnou látku atenololum.

Vasocardin je používán k léčbě esenciální hypertenze, angíny pectoris, ischemické choroby srdeční. Je přímý konkurent k Betalocu a obsahuje účinnou látku metoprololi tartras.

III. Kvantitativní metody

Údaje o propagačních aktivitách a prodeji farmaceutických přípravků byly vyhodnoceny metodami analýzy časových řad. Jsou-li $Y=(y_1,\ldots\ldots,y_n)$ čtvrtletní hodnoty prodeje (vyjádřené v počtu prodaných balení),základní rozklad časové řady má tvar (Wonnacot, Wonnacot, 1990)

$$Y= a + bT+ c_2Q_2 + c_3Q_3 + c_4Q_4 + e, \qquad (1)$$

kde T je čas, Q_2,Q_3,Q_4 jsou nepravé proměnné pro 2, 3, 4 čtvrtletí (Q_1=1 referenční je 1. čtvrtletí) a e je reziduum. Koeficienty a, b, c_2, c_3, c_4 jsou odhadnuty metodou nejmenších čtverců. Dostáváme tak model pro trend, sezónní složku a odchylku od modelu e. Rostoucí trend ($b>0$) znamená zvýšení propagační aktivit respektive prodeje.
Další časové řady odpovídají jednotlivým propagačním aktivitám: počty návštěv reprezentantů farmaceutické firmy, které se týkají určitého přípravku (RV), počet poštovních zásilek, které lékař obdržel od farmaceutické firmy. Tyto zásilky obsahují propagační materiály týkající se určitého přípravku (DM), počty seminářů, které uspořádala farmaceutická firma pro určitý přípravek (SE), počet vzorků léku, který byl dán doktorovi, aby ho mohl předat pacientovi a vyzkoušet jeho účinky (SA). Pro účely posouzení vzájemného vztahu propagace a prodeje byly čtyři propagační aktivity sloučeny do výsledné časové řady $X =(x_1,\ldots\ldots,x_n)$ podle doporučeného vzorce

$$X= RV + 1/2\ SE + 1/6\ SA + 1/20\ DM \qquad (2)$$

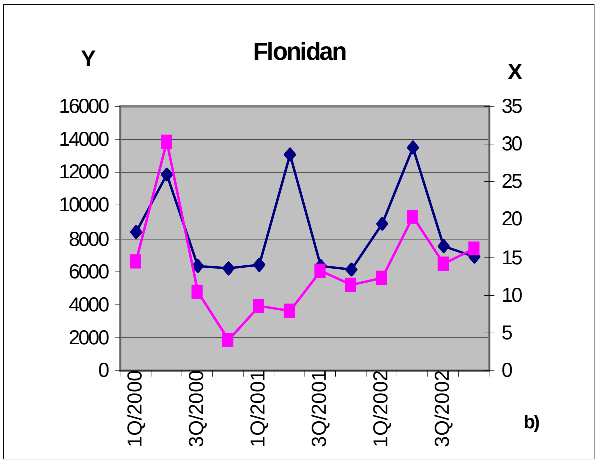
Na časovou řadu X lze také aplikovat rozklad (1) pro detekci trendu a sezónní složky. Pro posouzení vazby mezi oběma časovými řadami X a Y byla vypočtena vzájemná korelační funkce

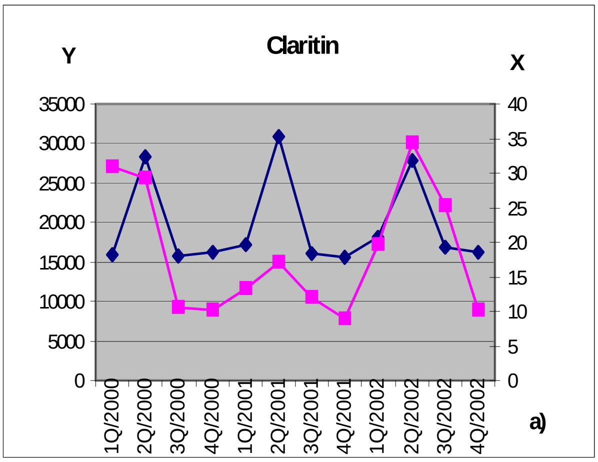
$$\rho_{x,y}(k)= r\ (x\ (t),\ y\ (t+k)), \qquad (3)$$

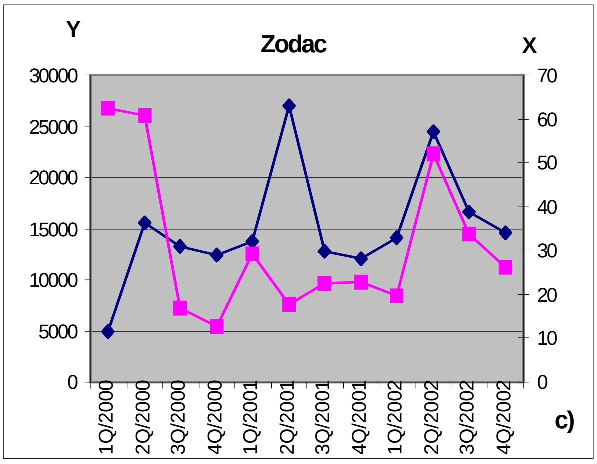
$k = 0,1,\ldots,m$, kde r(x(t), y(t+k)) je výběrový korelační koeficient řady propagačních aktivit a posunuté (o k časových jednotek) řady prodeje.

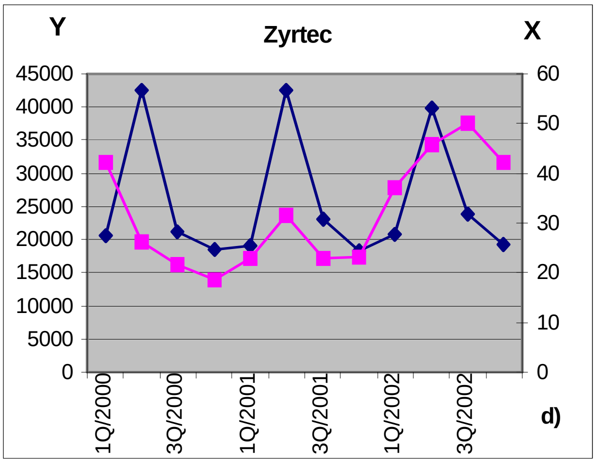
IV. Numerické výsledky

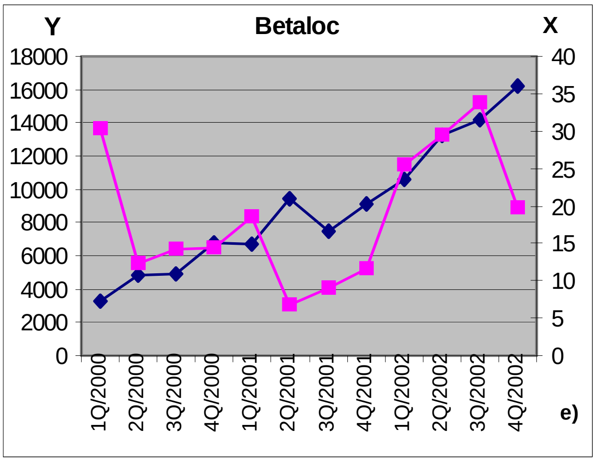
Studované časové řady jsou poměrně krátké, za tři roky obsahují celkem dvanáct čtvrtletních údajů, tj. n=12. Na obr.1 jsou vykreslené průběhy časových řad, vždy X (dolní, šedá čára) a Y (horní, černá čára) pro daný přípravek.

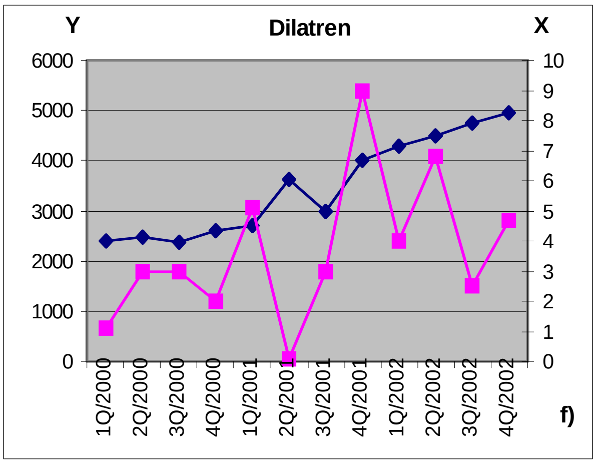

Flonidan
Y
X
16000 14000 12000 10000 8000 6000 4000 2000 0
35 30 25 20 15 10 5 0
1Q/2000 3Q/2000 1Q/2001 3Q/2001 1Q/2002 3Q/2002
b)

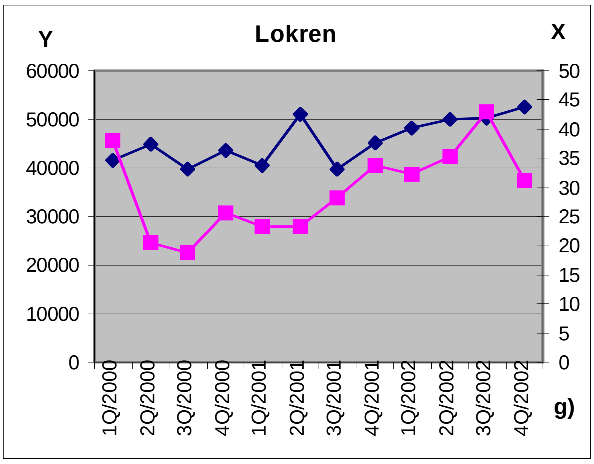

Claritin
Y
X
35000 30000 25000 20000 15000 10000 5000 0
40 35 30 25 20 15 10 5 0
1Q/2000 2Q/2000 3Q/2000 4Q/2000 1Q/2001 2Q/2001 3Q/2001 4Q/2001 1Q/2002 2Q/2002 3Q/2002 4Q/2002
a)

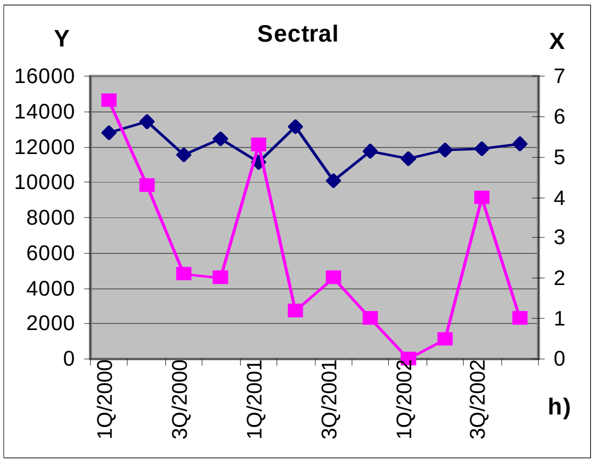

Zodac
Y
X
30000 25000 20000 15000 10000 5000 0
70 60 50 40 30 20 10 0
1Q/2000 2Q/2000 3Q/2000 4Q/2000 1Q/2001 2Q/2001 3Q/2001 4Q/2001 1Q/2002 2Q/2002 3Q/2002 4Q/2002
c)

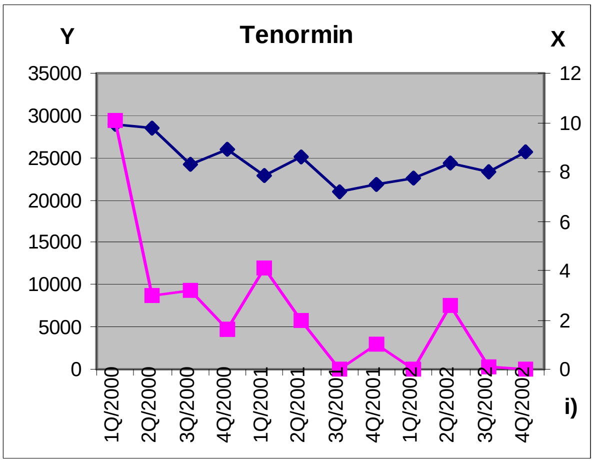

Zyrtec
Y
X
45000 40000 35000 30000 25000 20000 15000 10000 5000 0
60 50 40 30 20 10 0
1Q/2000 3Q/2000 1Q/2001 3Q/2001 1Q/2002 3Q/2002
d)

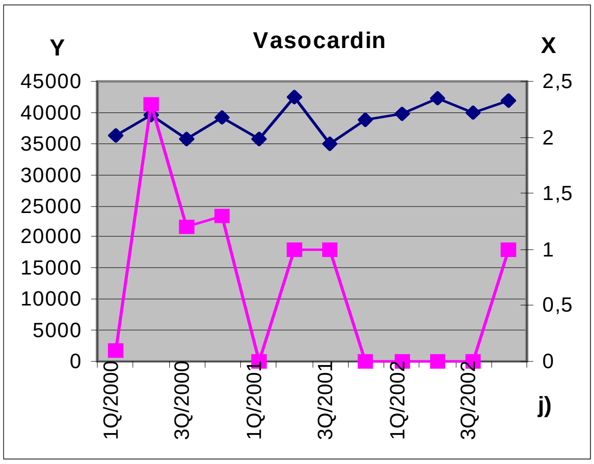

Betaloc
Y
X
18000 16000 14000 12000 10000 8000 6000 4000 2000 0
40 35 30 25 20 15 10 5 0
1Q/2000 2Q/2000 3Q/2000 4Q/2000 1Q/2001 2Q/2001 3Q/2001 4Q/2001 1Q/2002 2Q/2002 3Q/2002 4Q/2002
e)


Dilatren
Y
X
6000 5000 4000 3000 2000 1000 0
10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0
1Q/2000 2Q/2000 3Q/2000 4Q/2000 1Q/2001 2Q/2001 3Q/2001 4Q/2001 1Q/2002 2Q/2002 3Q/2002 4Q/2002
f)


Lokren
Y
X
60000 50000 40000 30000 20000 10000 0
50 45 40 35 30 25 20 15 10 5 0
1Q/2000 2Q/2000 3Q/2000 4Q/2000 1Q/2001 2Q/2001 3Q/2001 4Q/2001 1Q/2002 2Q/2002 3Q/2002 4Q/2002
g)


Sectral
Y
X
16000 14000 12000 10000 8000 6000 4000 2000 0
7 6 5 4 3 2 1 0
1Q/2000 3Q/2000 1Q/2001 3Q/2001 1Q/2002 3Q/2002
h)





Obr.1: Průběhy časových řad počtu prodaných balení Y a výsledné propagační aktivity X, viz (2), v období let 2000 – 2002 pro deset přípravků a) – j).

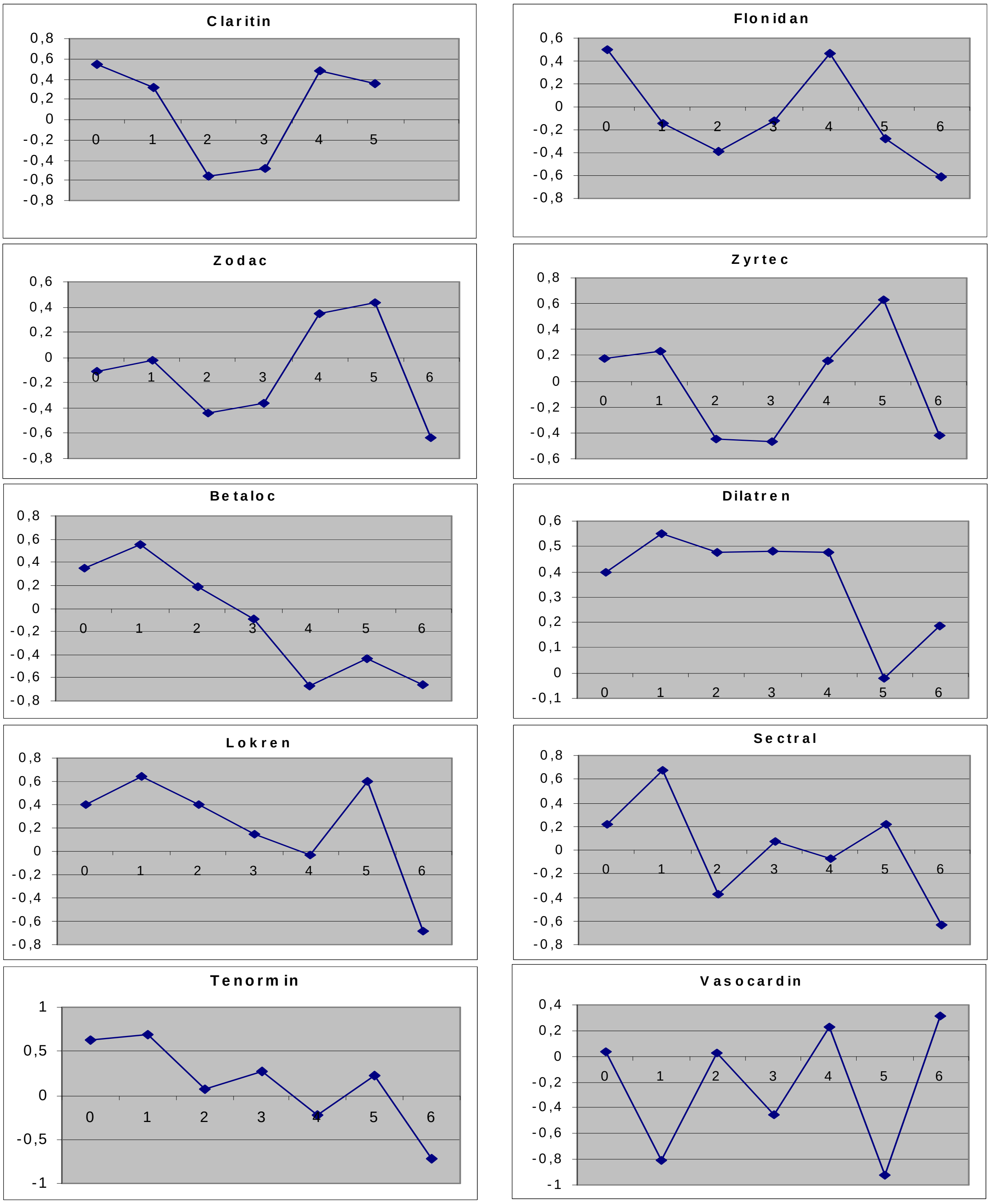
Rozklad a + bT+ c_2Q_2 + c_3Q_3 + c_4Q_4 + e umožňující popsat trend a sezónní složku byl aplikován na všechny přípravky. Tabulky 1, 2 obsahují koeficienty rozkladu

X	c_2	c_3	c_4	b	a
Zodac	6,98	-11,45	-14,69	-0,66	40,44
Zyrtec	-1,64	-6,72	-12,29	2,09	23,66
Claritin	5,45	-5,81	-12,25	0,26	19,90
Flonidan	7,63	0,56	-1,62	0,11	11,23
Betaloc	-9,77	-8,10	-13,06	1,17	18,94
Dilatren	-0,38	-1,12	1,00	0,28	2,01
Lokren	-6,04	-3,65	-4,59	1,21	25,17
Sectral	-1,61	-0,62	-1,69	-0,29	5,35
Tenormin	-1,725	-2,68333	-2,44167	-0,475	7,108333
Vasocardin	1,188542	0,94375	1,098958	-0,12188	0,642708

Y	c_2	c_3	c_4	b	a
Zorav	10712	1794	-118	739	7235
Zyrtec	21452	2530	-1494	20	20025
Claritin	11868	-1039	-1321	94	16578
Flonidan	4805	-1421	-1869	124	7271
Betaloc	1234	-163	619	1075	1447
Dilatren	137	-302	-86	269	1786
Lokren	4271	-2166	740	981	38502
Sectral	1128	-391	661	-92	12207
Tenormin	1541	-1196	789	-364	26609
Vasocardin	3818	-1144	1476	406	35211

Tabulka 1, 2: Koeficienty rozkladu a + bT + c_2Q_2 + c_3Q_3 + c_4Q_4 + e časových řad X (propagační aktivity), Y (prodej)

Poslední použitou metodou byl výpočet vzájemné korelační funkce časových řad X a Y. Při výpočtu se délka řad pro korelaci s časovým posunem zmenšuje, proto volíme pouze m=6. Grafy vzájemných korelačních funkcí jsou na obr.2.



Obr.2:Grafy vzájemných korelačních funkcí časových řad X a Y pro jednotlivé přípravky a)-j).

Pokud je nejvyšší hodnota vzájemné korelace $\rho_{x,y}(0)$, znamená to, že nedochází k časovému posunu při odezvě prodeje na propagační aktivity. Při porovnání různých přípravků hodnotíme jako výraznější odezvu tu, kde je vyšší kladná hodnota $\rho_{x,y}(0)$.

U časových řad s trendem a sezónní složkou lze též korelovat jen reziduální části obou řad.

V. Závěr

V souboru A jsou konkurenční dvojice přípravků Zyrtec- Zodac a Claritin-Flonidan. U všech těchto přípravků je patrná sezónní složka, jejich prodej kulminuje ve druhém čtvrtletí. Tomu odpovídá zvýšená propagační aktivita v prvním a druhém čtvrtletí. Grafy vzájemných korelačních funkcí Claritinu a Flonidanu mají typický průběh s maximem v nule. U Zyrtecu a Zodacu je tento průběh mírně narušen začátkem časové řady (maximální propagace při náběhu přípravku).

V souboru B je původní a nejvíce prodávaný přípravek Lokren. U některých jeho konkurenčních nabíhajících přípravků je patrný rostoucí trend prodeje (Betaloc, Dilatren). U přípravků, které jsou déle na trhu, jsou místy propagační aktivity utlumeny, čímž je význam vzájemné korelační funkce snížen. Ovšem u přípravků Betaloc, Lokren má opět tato funkce typický průběh s maximem v nule respektive v jedničce.

VI. Literatura

Wonnacot T.H., Wonnacot R.J. : Statistika pro obchod a hospodářství (český překlad). Victoria Publishing, 1996.

Discrete models in microeconomics and difference equations

Jan Coufal, Soukromá vysoká škola ekonomických studií Praha

The behavior of consumers and entrepreneurs has been analyzed on the assumption that they are unable to affect the prices at which they buy and sell. The isolated consumer is confronted with given prices, and he purchases the commodity combination that maximizes his utility. The entrepreneur faces given output and input prices and decides to produce an output level for which his profit is maximized. Each must solve a maximum problem. The individual actions of all consumers and entrepreneurs together determine the prices which are considered parameters by each one alone. Prices are determined in the market where consumers and entrepreneurs meet and exchange commodities. The consumer is the buyer and the entrepreneur the seller in the market for final good. Their roles are reversed in a market for a primary input such as labor. Some inputs are outputs of other firms. Wheat is an input for the milling industry, but an output of agriculture. Both buyers and sellers are entrepreneurs in the markets for such intermediate goods. The analysis of market equilibrium seeks to describe the determination of the market price and the quantity bought and sold.

A perfectly competitive commodity market satisfies the following conditions:

(1) firms produce a homogenous commodity, and consumers are identical from the sellers' point of view in that there are no advantages or disadvantages associated with selling to a particular consumer;
(2) both firms and consumers are numerous, and the sales or purchases of each individual unit are small in relation to the aggregate volume of transactions;
(3) both firms and consumers possess perfect information about the prevailing price and current bids, and they take advantage of every opportunity to increase profits and utility respectively;
(4) entry into and exit from the market is free for firms and consumers in the long run.

Equilibrium price and quantity are determined by the equality of demand and supply. Equilibrium is characterized by the acquiescence of buyers and sellers in the *status quo*: no participant in the market has an incentive to modify his behavior. However, the existence of equilibrium point does not guarantee that it will be attained. There is no guarantee that the equilibrium price will be established if the market is not in equilibrium when the contracting begins. There is also no reason to assume that the initial price will happen to be the equilibrium price. Moreover, changes in consumer preferences will generally shift the supply curve. Both factors tend to disturb an established equilibrium situation. The change defines a new equilibrium, but there is again no guarantee that it will be attained. In general, a disturbance denotes a situation on which the actual price is different from the equilibrium price. An equilibrium is *stable* if a disturbance results in return to equilibrium and *unstable* if it does not. It is implicitly assumed that the market equilibrium is stable.

A disturbance usually creates an adjustment process in the market. For example, if the actual price is less than the equilibrium price, the adjustment may consist of some buyers raising their bids for commodity. Static analysis abstracts from the time path of the adjustment process and considers only the nature of the change, i. e., whether it is toward, or away from equilibrium.

Define

$$E(p) = D(p) - S(p)$$

as the demand at price p where D is demand function and S is supply function. Stability conditions are derived from assumptions about the market behavior of buyers and sellers. The *Walrasian stability condition* is based on assumption that buyers tend to raise their bids if excess demand is positive and sellers tend to lower their prices if it is negative. If this behavior assumption is correct, a market is stable if a price rise diminishes excess demand, i. e., if

$$E'(p) = D'(p) - S'(p) < 0.$$

This condition is satisfied automatically if the demand curve has negative slope and the supply curve has positive slope. If both are positively sloped, the supply curve must be flatter than the demand curve [$S^{-1}(q) < D^{-1}(q)$] to satisfy Walrasian stability condition. If both are negatively sloped, the supply curve must be steeper than the demand curve.

The static stability condition is stated in terms of the rate of change of excess demand with respect to price. Nothing is said about the time path of adjustment. One might not expect instantaneous adjustments in the present model. If the initial price is not equal to the equilibrium price, it changes, and recontracting takes place. If the new price is still different from equilibrium price, it is again forced to change. The dynamic nature of recontracting may be formalized in a model in which recontracting takes place during periods of fixed length, say, one hour, with the auctioneer announcing the new price at beginning of each period. The analysis of dynamic stability investigates the course of price over time, i. e., from period to period. Equilibrium is stable in the dynamic sense if the price converges to (or approaches) the equilibrium price over time; it is unstable if the price change is away from equilibrium.

The assumption that a positive excess demand tends to raise price can be modeled in many different ways. A commonly used mathematical model is

$$p_t - p_{t-1} = k\, E(p_{t-1})$$

where p_t is the price in period t and k is positive constant. This equation describes a price adjustment process that occurs over discrete intervals of time and expresses one possible type of behavior for buyers and sellers. Assuming that there is a positive excess demand $E(p_{t-l})$ in period $(t-1)$, it expresses the assumption that an excess demand of $E(p_{t-1})$ induces buyers to bid a price

$$p_t = p_{t-1} + k\, E(p_{t-1}) > p_{t-1}$$

in the following period. Assume that the demand and supply functions are

$$D_t = a\, p_t + b$$
$$S_t = A\, p_t + B$$

Excess demand in period $(t – 1)$ is

$$E(p_{t-1}) = (a – A)\, p_{t-1} + b – B$$

Substituting this

$$p_t – p_{t-1} = k\, [(a – A)\, p_{t-1} + b – B]$$

and

$$p_t = [1 + k\, (a – A)]\, p_{t-1} + k\, (b – B)$$

The first-order difference equation describes the time path of price on the basis of the behavior assumption. Given the initial condition

$$p = p_0, \text{ when } t=0,$$

its solution is

$$p_t = (p_0 – p_e)[1 + k\, (a – A)]^t + p_e$$

where

$$p_e = (b – B)\, (A – a)^{-1}$$

is the equilibrium price determined assumptions by setting

$$D_t - S_t = 0$$

and solving

$$p_e = p_t.$$

..

The equilibrium is stable if the actual price level approaches the equilibrium level as t increases. The prices level converges to p_e without oscillations if

$$0 < 1 + k\, (a – A) < 1.$$

The right-hand side of this inequality holds if

$$a < A.$$

The left-hand side holds if

$$k < (A – a)^{-1}.$$

Both static and dynamic stability depend upon the slopes of the demand and supply curves. Dynamic stability depends in addition on the magnitude of the parameter k which indicates the extent to which the market adjusts to a discrepancy between the quantities demanded and supplied per unit of time. A large k indicates that buyers and sellers tend to “overadjust”: if excess demand is positive, bidding by buyers is sufficiently active to raise the price above equilibrium level. Each adjustment is in the right direction, but is exaggerated in magnitude. Dynamic analysis thus takes into account the strength of reactions to disturbances.

He static and dynamic approaches to stability are fundamentally different. Static stability need not imply dynamic stability, but dynamic stability implies static stability. The reason for this discrepancy is that dynamic analysis is a more inclusive tool for investigating the properties of equilibrium. Static analysis concerns itself only with the direction of the adjustment and neglects the magnitude of the adjustment from period to period.

Let

$$D_t = - 0{,}5\, p_t + 100$$
$$S_t = - 0{,}1\, p_t + 50$$

and let $k = 6$. The equilibrium in the static Walrasian sense if

$$D'(p) - S'(p) < 0.$$

Substituting from the demand and supply functions,

$$-0{,}5 - (-0{,}1) = -0{,}4 < 0.$$

Dynamic stability requires

$$-1 < 1 + k\,(a - A) < 1.$$

Substituting the appropriate values gives

$$1 + k\,(a - A) = -1{,}4$$

and required left-hand inequality does not hold. The market will exhibit explosive oscillations.

Producers' supply functions show how they adjust their outputs to the prevailing price. Since production takes time, the adjustment may not be instantaneous, but may perceptible in the market only after a period of time. Agricultural commodities often provide good examples of lagged supply. Production plans are made after the harvest. The output corresponding to these production plans appears on the market a year later. Assume that the demand and supply functions are

$$D_t = a\,p_t + b$$
$$S_t = A\,p_{t-1} + B$$

The market is in dynamic equilibrium if the price remains unchanged from period, i. e., if

$$p_t = p_{t-1}.$$

This equating yields the unique equilibrium price

$$p_e = (B - b)\,(a - A)^{-1}.$$

The quantity demanded in any period depends upon the price in that period, but the quantity supplied depends upon the price in the previous period. It is assumed that the quantity supplied in period t is always equal to the quantity demanded in that period; that is, p_t adjusts to bring about equality of D_t and S_t as soon as S_t appears on the market. This implies that no producer is left with unsold stocks and no consumer with an unsatisfied demand. Therefore

$$D_t - S_t = 0.$$

Substituting

$$a\,p_t + b - A\,p_{t-1} - B = 0.$$

Solving for p_t,

$$p_t = A\,a^{-1}\,p_{t-1} + (B - b)\,a^{-1}.$$

Assuming that the initial condition is given by $p = p_0$ when $t = 0$, the solution of this first-order difference equation is

$$p_t = (p_0 - p_e)\,(A\,a^{-1})^t + p_e.$$

This solution describes the path of the price as a function of time.

The conditions for dynamic stability are not the same as in the simple dynamic case. Buyers and sellers react to excess demand in the simple dynamic case. Excess demand is zero in cobweb situations. Buyers react to given supplies in terms of the prices they offer. Sellers respond to given supplies in terms of the prices they offer. Sellers respond to given prices in terms of the quantities they supply in the following period.

The theory of perfect competition analyzes the factors that determine price and quantity in markets in which

(1) the product is homogeneous and buyers are uniform,
(2) buyers and sellers are numerous,
(3) buyers and sellers possess perfect information,
(4) there are free entry and exit for both buyers and sellers in the long time.

The participants in the market act as if they had no influence on the price, and each individual regards it as given parameter.

References

P. A. Samuelson: *Foundations of Economic Analysis,* Harvard University Press, 1948
H. S. Ellis, W. Fellner: *External Economics and Diseconomics,* American Economic Review, vol.33 (September, 1941), pp. 242 – 263
E. Schneider: *Pricing and Equilibrium,* W. Hodge, London, 1952

Keywords
Market, equilibrium, difference equation

Speciální možnosti conjointní analýzy

Anna Čermáková, Jihočeská univerzita České Budějovice

Úvod

Pro zajištění konkurenceschopnosti firmy je důležité poznat trh, tj. poznat počet a specifikum jednotlivých tržních segmentů. Budeme-li tržním segmentem chápat množinu objektů vnitřně si vzájemně podobných, pak segmentací trhu rozumíme nalezení a definování podmnožin takto vzájemně si podobných objektů.

Klasifikaci podmnožin lze sice orientačně provést na základě zkušeností, avšak objektivnější výsledky zajistí využití některé ze statistických metod.

Jednou ze zajímavých, avšak v naší republice málo známých metod, je conjointní analýza. Slovo "conjoint" vzniklo z úvahy, že relativní význam posuzovaných věcí (*con*sider) lze měřit společně (*joint*ly) i tehdy, když lze jen těžko měřit jejich význam odděleně. Typická situace, kde se těžko vlastnosti výrobku měří odděleně, je uvedena v aplikační části příspěvku.

Základní princip conjointní analýzy

Conjointní analýza je souhrnný název pro skupinu metod, která se zabývá určením preferencí, které spotřebitelé přikládají různým vlastnostem (atributům) nějakého výrobku.

Obvyklou formou, jak firmy získávají informace o požadavcích trhu, je anketní šetření formou dotazníků. V dotaznících jsou potenciální spotřebitelé žádáni, aby se vyjádřili k jednotlivým vlastnostem výrobku, tj. jednotlivé vlastnosti výrobku jsou analyzovány odděleně. Oproti tomu při conjointní analýze hodnotí potenciální spotřebitelé předem dané kombinace vlastností výrobku (úrovně atributů) komplexně, např. tím, že mají k dispozici sadu fotografií různých variant výrobku nebo sadu kartiček s úplným popisem těchto variant. Úkolem spotřebitele je vyjádřit souhrnně své preference mezi těmito různými kombinacemi (např. pořadím, počtem bodů apod). Aby respondent nebyl zatěžován velkým počtem karet, vytvoří se nejdříve tzv. ortogonální pole, což je speciální podmnožina všech možných kombinací úrovní atributů, při níž se vyskytuje každá úroveň jednoho atributu v kombinaci s každou úrovní jiného atributu se stejnou, či alespoň proporcionální četností, což zajišťuje nezávislost hlavních efektů a nedochází ke ztrátě informací. Tvorba ortogonálních plánů je složitá. Proto existují knihovny připravených plánů - buď se používají plány Placketta a Burmana [6] nebo plány Addelmana [1].

Uveďme typickou situaci, vhodnou pro analýzu prostřednictvím metod conjointní analýzy.

Pro jihočeský region je tradiční výroba nábytku. Zaměřme se tedy na průzkum trhu s obytnými stěnami. Jihočeská firma s velkou nábytkářskou tradicí žádala, aby respondenti v dotazníku uvedli, jaké dřevo či design dřeva u nábytku preferují. S ohledem na své stávající dodavatele nabízela následující varianty: dub, buk, olše, bříza. Respondent jistě jednu z variant označí, avšak lze pochybovat, že zná kresbu a barvu nabízeného dřeva. Lze si dokonce představit, že ten, kdo si jde koupit obývací stěnu z olše, si nakonec vybere stěnu z břízy, protože má zakomponovány kovové prvky, které jsou módní a kupující dává módnosti *podvědomě* vyšší prioritu než použitému druhu dřeva. Tj. zákazník si z nabízených variant výrobku vybral, ale sám neumí uvést racionální důvod - líbí se mu více než ostatní.

Při těchto speciálních trzích nemůže být podkladem pro poznání trhu klasický dotazník. Dospěli bychom zákonitě k chybné segmentaci. Simulujeme proto konkrétní situaci tím, že respondentovi předložíme „vzorník“ formou sady karet. Respondent karty seřadí podle svých preferencí. Poté použijeme některou z dekompozičních metod conjointní analýzy., Ta rozloží informace o pořadí do komponent. Komponenty pak můžeme použít jako vstupní informace pro další statistické zpracování např. pro shlukovou analýzu.

Conjointní analýza je vhodná spíše pro výrobky, které nejsou běžně nakupovány, či pro výrobky nově zaváděné. Pracuje s atributy (vlastnostmi) výrobku a jejich úrovněmi. Při přípravě statistického šetření se doporučuje:

1) Omezit se maximálně na 6 - 7 atributů (diskrétních, lineárních či kvadratických).
2) Volit atributy důležité pro spotřebitele (formou předvýzkumu lze takové atributy zjistit).
3) Volit atributy, jejichž úroveň může výrobce ovlivnit. Firma by měla mít možnost reagovat změnami výrobního programu na zjištěné skutečnosti (nábytkářská firma tak jistě může).
4) Omezit se na konečný, nepříliš vysoký počet úrovní.

Matematický model conjointní analýzy

Označme

n počet karet předkládaných respondentovi;
p počet atributů, z toho
- d počet atributů s diskrétní vazbou;
- l počet atributů s lineární vazbou;
- q počet atributů s kvadratickou vazbou;

m_i počet úrovní i-tého diskrétního atributu ($i = 1,2,\dots,d$);
a_{ij} j-tou úroveň i-tého diskrétního atributu ($i = 1,2,\dots,d$; $j = 1,2,\dots,m_i$);
x_i i-tý atribut s lineární vazbou ($i = 1,2,\dots,l$);
z_i i-tý atribut s kvadratickou vazbou ($i = 1,2,\dots,q$);
r_i odezvu (pořadí) na i-tou kartu ($i = 1,2,\dots,n$).

Teoretickou odezvu na i-tou kartu, tj. celkovou užitečnost, jakou má pro respondenta výrobek, uvedený na i-té kartě, můžeme zapsat jako

$$\hat{r}_i = \hat{\beta}_0 + \sum_{j=1}^{p} \hat{u}_{jk_{ji}} \quad ,$$

kde $\hat{\beta}_0$ je absolutní člen ,
$\hat{u}_{jk_{ji}}$ je odhad užitečnosti (dílčí ceny) odpovídající k_{ji}-té úrovni j-tého atributu na i-té kartě.

Odhady dílčích užitečností se počítají v závislosti na typu vazby konkrétního atributu.

a) Pro atributy s diskrétní vazbou je

$\hat{u}_{jk} = \hat{\alpha}_{jk}$ pro $k = 1,2,\ldots, m_j - 1$,

$\hat{u}_{jk} = -\sum_{j=1}^{m_j-1} \hat{\alpha}_{jk}$ pro $k = m_j$.

b) Pro atributy s lineární vazbou je

$\hat{u}_{jk} = \hat{\beta}_j x_k$.

c) Pro atributy s kvadratickou vazbou je

$\hat{u}_{jk} = \hat{\gamma}_{j1} z_{jk} + \hat{\gamma}_{j2} z_{jk}^2$.

Variabilita dílčích užitečností, tj. $Var(u_{jk})$ se opět odhaduje v závislosti na typu vazby mezi úrovněmi konkrétního atributu a preferencí spotřebitele.

a) Pro atributy s diskrétní vazbou je

$Var(u_{jk}) = Var(\hat{\alpha}_{jk})$ pro $k = 1,2,\ldots, m_j - 1$,

$Var(\hat{u}_{kj}) = \sum_{j=1}^{m_j-1} Var(\hat{\alpha}_{jk}) - 2\sum_{i=1}^{m_j-1}\sum_{l<i} Cov(\hat{\alpha}_{ji}, \hat{\alpha}_{jl})$ pro $k = m_j$.

b) Pro atributy s lineární vazbou je

$Var(u_{jk}) = x_k^2 Var(\hat{\beta}_j)$.

c) Pro atributy s kvadratickou vazbou je

$Var(u_{jk}) = z_k^2 Var(\hat{\gamma}_{j1}) + 2z_k^3 Cov(\hat{\gamma}_{j1}, \hat{\gamma}_{j2}) + z_k^4 Var(\hat{\gamma}_{j2})$.

Přitom hodnoty $\hat{\beta}_0, \hat{\alpha}, \hat{\beta}$ a $\hat{\gamma}$,

$\hat{\beta}_0 = \hat{\beta}_0^* - \sum_i \hat{\beta}_i \bar{x}_i - \sum_i (\hat{\gamma}_{i1}\bar{z}_i + \hat{\gamma}_{i2}\bar{z}_i^2)$,

získáme řešením soustavy rovnic

$(\hat{\beta}_0^* \hat{\alpha} \hat{\beta} \hat{\gamma}^*)' = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\vec{\mathbf{y}}$,

kde

$y_i = (n - r_i), i = 1, 2, \ldots, p$;

X je matice ortogonálního pole, tzv. designová matice.

Pro porovnání důležitosti jednotlivých atributů je třeba zjistit skóre relativní významnosti (importance score). Počítáme je podle

$V_i = \frac{R_i}{\sum R_i} 100$, $i = 1, 2, \ldots, p$,

kde R_j je variační rozpětí dílčích užitečností i-tého atributu a $\sum R_i$ je součet těchto rozpětí.

Modely conjointní analýzy lze vytvářet jak pro jednotlivé respondenty - získáme tak individuální modely preferencí -, tak pro celou skupinu respondentů - získáme tak souhrnný (skupinový) model preferencí.

APLIKACE A DISKUSE

Nábytkářská firma vybrala 6 atributů, které považovala za důležité atributy obývacích stěn –viz tab. 1.

Tab. 1.

Atributy	**Úroveň**
Způsob provedení	masiv dýha lamino
Design	olše buk dub bříza
Variabilnost	sektor pevná sestava
Způsob pořízení	na zakázku v prodejní síti
Zařazení módních prvků	ano ne
Výrobce	L T J

Oslovila 100 respondentů. Aby jednotliví respondenti nebyli zatíženi řazením neúměrného počtu kartiček, bylo prostřednictvím ortogonálního plánu navrženo 16 karet s popisem obývacích stěn a jednotliví respondenti byli požádáni, aby seřadili kartičky podle své priority (první byla kartička s popisem stěny, která se respondentovi líbila nejvíce). Při aplikaci metod conjointní analýzy vzniklo 100 individuálních modelů - schéma modelu prvního respondenta je uvedeno na schématu č. 1.

Schéma 1.

```
SUBJECT        1,00
NAME
Importance     Utility    Factor
                          DESIGN       design
53,53          3,6875       0 ----     olše
               0,6094       0 -        buk
              -2,2188     -- 0         dub
              -2,0781     -- 0         bříza

                          VARIABIL     variabil
8,03           0,2589       0          sektor
              -0,2589       0          sestava
```

SUBJECT NAME	1,00		
Importance	Utility	Factor	
		MODNI	módní
5,35	-0,0446	0	ano
	0,0446	0	ne
		PORIZENI	pořízení
6,21	-0,0625	0	prodejny
	0,0625	0	zakázka
		VYROBCE	výrobce
8,76	0,3896	0	L
	0,5455	0 -	T
	-0,9351	- 0	J
		PROVEDEN	provedení
18,12	0,8363	- 0	masiv
	2,0149	-- 0	dýha
	-2,8512	0 --	lamino
8,2238	CONSTANT		

Pearson´s R = 0,954 Significance = ,0000

Kendall´s tau = 0,767 Significance = ,0000

Poznámka: Hodnoty ve sloupci Importance udávají, z kolika procent se na rozhodnutí respondenta o prioritě (koupi) podílely jednotlivé sledované atributy. (Tj. první respondent se z více než 50 % rozhoduje podle designu.) Ve sloupci Utility je uvedena "cena", jakou má pro respondenta konkrétní úroveň atributu. Tj. pro prvního respondenta zvyšuje hodnotu nabídky skutečnost, že stěna je vyrobena - či má design - z olše nebo buku a naopak hodnotu nabídky snižuje design dubu a břízy.

Prostřednictvím conjointní analýzy bylo tedy získáno 100 individuálních modelů. Preference každého respondenta pak byly popsány šestisložkovým vektorem. Matice těchto vektorů sloužila jako vstup pro shlukovou analýzu. Prostřednictvím metody hlavních komponent bylo prokázáno, že je třeba shlukovat do dvou shluků (tržních segmentů).

Shlukování bylo provedeno nehierarchickým Forgyovým algoritmem.

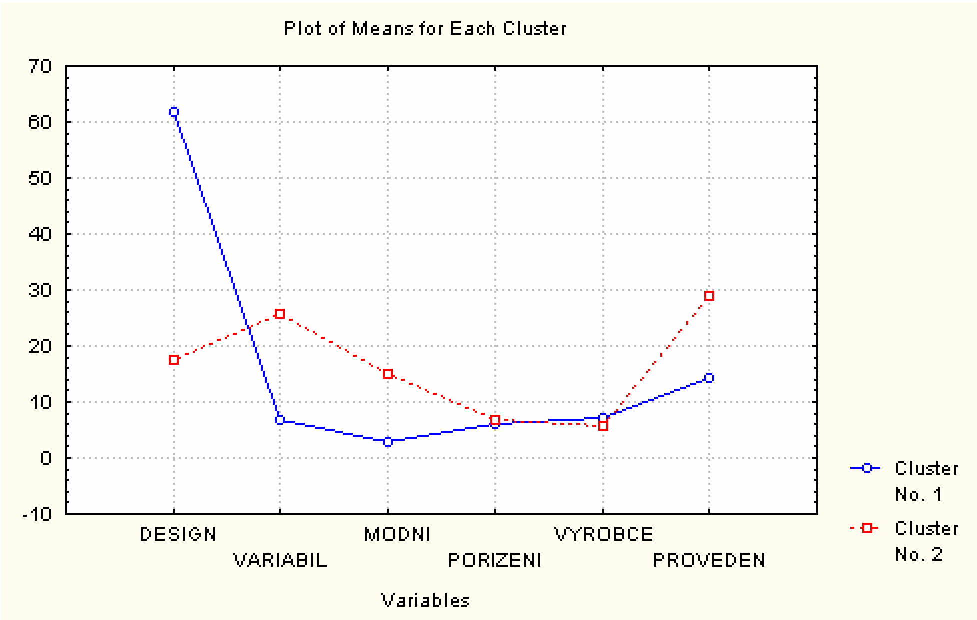
Výsledky jsou uvedeny v tabulce 2. a na grafu 1.

Tab. 2.

Cluster Means	Cluster No. 1	Cluster No. 2
DESIGN	61,67375	17,6665
VARIABIL	6,908751	25,8775
MODNI	2,7775	15,08
PORIZENI	5,987875	6,627501
VYROBCE	7,268126	5,795
PROVEDE	14,13688	28,955

Z nich je zřejmé, že pro první segment je při koupi enormně důležitý design nábytku a určitou úlohu má i provedení. Druhý segment trhu tvoří zákazníci, kteří kladou důraz na variabilnost a provedení, jistou důležitost přikládají i designu a módnosti. Kdo nábytek vyrobil a zda je možno jej koupit v prodejně či nechat si vyrobit na zakázku, je pro oba segmenty trhu nedůležité.

Graf. 1.



Abychom zjistili konkrétní zájem zákazníků, byla jak pro první tak pro druhý segment provedena conjointní analýza - tentokrát agregovaná. Výsledky jsou uvedeny na schématech 2. a 3.

Schéma 2.

Averaged Importance	Utility	Factor	
		DESIGN	design
61,67	2,9125	0 ----	olše
	0,5	0	buk
	- - 1,83751	-- 0	dub
	-1,5750	-- 0	bříza
		VARIABIL	variabil
6,91	0,475	0 -	sektor
	-0,475	-0	sestava
		MODNI	módní
2,78	-0,812	-0	ano
	0,812	0-	ne
		PORIZENI	pořízení
5,98	-0,1	0	prodejny
	0,1	0	zakázka
		VYROBCE	výrobce
7,26	- 0,0227	0	L
	0,0318	0	T
	-0,0091	0	J
		PROVEDEN	provedení
14,13	1,5776	0--	masiv
	0,7888	0-	dýha
	-2,3664	--- 0	lamino
7,8	CONST ANT		

Pearson´s R = 0,957 Significance = ,0000

Kendall´s tau = 0,833 Significance = ,0000

Schéma 3.

Averaged Importance	Utility	Factor	
		DESIGN	design
17,66	-0,1875	0	olše
	0,0625	0	buk
	-0,3125	0	dub
	0,4375	0	bříza
		VARIABIL	variabil
25,88	1,9062	0 --	sektor
	-1,9062	-- --0	sestava
		MODNI	módní
15,08	0,3750	0	ano
	-0,3750	0	ne
		PORIZENI	pořízení
6,63	0,0938	0	prodejny
	-0,0938	0	zakázka
		VYROBCE	výrobce
5,80	-1,1369	- 0	L
	-1,5909	- 0	T
	2,7228	0 --	J
		PROVEDEN	provedení
28,95	0,6509	0-	masiv
	2,2546	0 --	dýha
	-2,90552	-- 0	lamino
8,06	CONST ANT		

Pearson´s R = 0,966 Significance = ,0000

Kendall´s tau = 0,857 Significance = ,0000

Z výsledků conjointní analýzy je zřejmé, že zákazníci prvního tržního segmentu preferují design olše (popřípadě buku) v masivu, popřípadě v dýze. Zákazníci druhého tržního segmentu hledají na trhu sektorový dýhovaný nábytek. Jejich rozhodnutí o koupi podpoří, má-li stěna design buku či břízy a je-li vybavena módními prvky.

Závěr

Správné poznání trhu je základem prosperity firmy i regionu. Účelem příspěvku je ukázat, jak mohou exaktní statistické metody pomoci při výzkumu trhu. Současně je prokázáno, že nevystačíme vždy s klasickým anketním šetřením. Mnohdy ani zákazník není schopen kategorizovat své požadavky na výrobek či službu. V takovém případě je třeba použít metody conjointní analýzy. Současná multimediální technika umožňuje komunikaci potenciálních zákazníků s firmou i prostřednictvím Internetu. V naší republice zatím tvorba preferenčních karet a marketingový výzkum prostřednictvím multimédií běžný není. V USA se jedná o běžnou metodu marketingového výzkumu.

Obecně lze conjointní analýzu definovat jako metodu, která slouží k převedení kvalitativní informace obsažené v datech na informaci kvantitativní. V tomto smyslu ji můžeme chápat jako speciální postup přípravy dat pro navazující statistické zpracování.

Literatura

[1] ADDELMAN, S.: Orthogonal Main - Effects Plans for Asymmetrical Factorial Experiments. *Technometrics, 4, 1962, 21 - 46.*

[2] ČERMÁKOVA, A.: Použití conjointní analýzy jako metody přípravy dat pro segmentaci trhu s nealkoholickými nápoji. *Collection of Scientific Papers, Faculty of Agriculture in České Budějovice, Series for Economics, Management and Trade, 25, 2001 (1) str. 21 – 25*

[3] ČERMÁKOVÁ, A.: Possibility of Conjoint Analysis in Course of Modeling Consumer’s Preferences. *Acta Universitatis Agriculturae et Silviculturae* Mendelianae *Brunensis, IL, 2001,6, str.89 - 94*

[4] GREEN, P. E. and SRINIVASAN, V.: Conjoint Analysis in Marketing: New Developments with Implications for Research and Practice. *Journal of Marketing 54, (4) 1990, str. 3 - 19*

[5] SPSS Statistical Algorithms, *2nd Edition. Chicago 1991*

[6] PLACKETT, R. L., BURMAN, J. P.: The design of optimum multifactorial experiments. *Biometrika 33, 1946*

Statistické hodnocení experimentu k vývoji aterosklerózy

Radka Jůzková, MFF Univerzita Karlova v Praze
Petr Nachtigal, Vladimír Semecký, Martin Kopecký, FaF UK, Hradec Králové

1 Abstrakt

Při uměle navozených cholesterolových dietách dochází k patologickým změnám cév králíků. Patologické změny se projevují vznikem aterosklerotických lézí na cévní stěně. Aplikace stereologické metody Cavalieriho řezů umožňuje získat základní informace o objemu těchto lézí. Zabývali jsme se přesností těchto analýz. Výsledkem bylo určení minimálního množství vstupních dat, které zaručí požadovanou přesnost.

2 Úvod

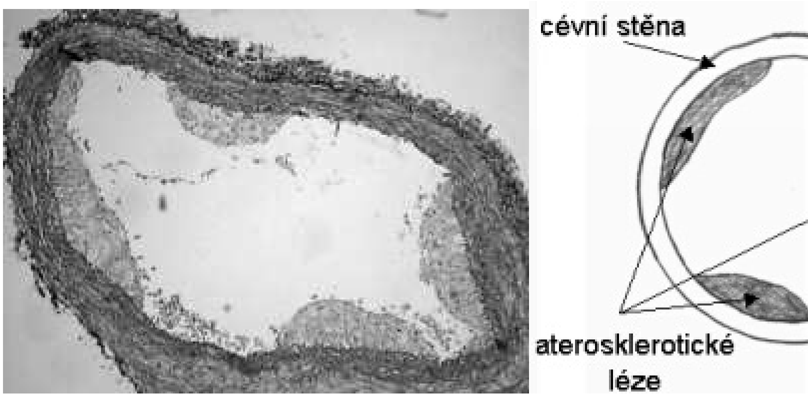
Automatické zpracování obrazu se užívá v aplikacích v biomedicíně, materiálovém výzkumu, geologii, meteorologii aj. Obrazovým analyzátorem lze získat celou řadu parametrů charakterizujících daný snímek struktury. Geometrické parametry dále umožňují vzájemné porovnávání obrazů. Důležitou otázkou je přesnost vybraných analýz. Nicméně je zde kladen důraz i na rychlost vlastní přípravy vzorku k obrazovému zpracování. Tyto dva faktory jdou často proti sobě. V konkrétních případech se tedy snažíme zvolit postup zpracování tak, aby množství analyzovaných dat bylo co nejmenší při zachování dostatečné přesnosti zjištěných parametrů.

Naším úkolem bylo odhadnout objem lézí cévy s požadovanou přesností, přičemž celý vzorek byl reprezentován příčnými řezy s konstantní vzdáleností mezi řezy. Pro odhad objemu bylo potřeba použít jen některé řezy, které byly vybrány systematickým náhodným výběrem. Otázka zněla, kolik řezů je minimálně nutné zvolit, aby příslušný odhad měl vypovídající hodnotu. K odhadu objemu byla použita Cavalieriho metoda řezů, k výpočtu koeficientu chyby byla technika převzata z [1].

3 Materiál

Zkoumaným materiálem byly části cévy ze dvou dospělých novozélandských bílých králíků, kteří byli součástí výzkumu patologických změn uvnitř elastických krevních cév při uměle navozených dietách pokusných zvířat. Při těchto dietách na vnitřní straně cévní stěny vznikaly aterosklerotické léze, které se s postupem času zvětšovaly a zabraňovaly tak průchodnosti cévy. Cévy, které byly použity pro níže uvedenou metodu, byly označeny čísly 1345-10-11 a 1345-15-11. U prvního ze vzorků je možné pozorovat menší množství vytvořených lézí než u druhého vzorku, což je dáno délkou užívání diet. Z každé z těchto cév byl vzat úsek dlouhý 0.36 mm a ten byl rozřezán na 72 řezů s konstantní šířkou 5 μm. Roviny řezů byly rovnoběžné.

Obsahy ploch lézí jednotlivých řezů obou vzorků byly spočítány poloautomatickou analýzou v systému LUCIA (SW Laboratory Imaging Praha s.r.o.). Příprava vzorku a spočítání obsahů jednotlivých cév byly provedeny na Fakultě farmacie UK v Hradci Králové (viz [2]). Obr. 1 znázorňuje schéma příčného řezu cévy a sejmutý řez cévy.



Obrázek 1: Obrázek nalevo zobrazuje schéma příčného řezu cévy a napravo je zobrazen reálný snímek řezu cévy

4 Cavalieriho metoda řezů

Zkoumaný vzorek je reprezentován systematickým náhodným výběrem řezů vzorku, přičemž jednotlivé řezy mají nenulovou šířku.

K popsání výše zmíněné metody je potřeba nejprve zavést následující terminologii.

Zafixujme tzv. vzorkovací osu a označme ji *ox*. Řezem vzorku je potom část prostoru vzorku ohraničená dvěma rovinami, které jsou kolmé k vzorkovací ose v bodech x a $x + t$, kde t je šířka řezu ve směru vzorkovací osy. Vzdálenost mezi řezy T zadefinujeme jako vzdálenost mezi jednotlivými začátky řezů a tato vzdálenost je pro celý vzorek konstantní.
Fomá1ně vyjádřeno: průměty řezů na vzorkovací osu odpovídají intervalům $\{[s + kT; s + kT + t\}, k \in N\}$, kde s je náhodně vybrané číslo z intervalu $[0; T)$. Pro další úvahy lze předpokládat, že vzdálenost mezi řezy je větší než jejich šířka, tj. $T > t$. Počet vybraných řezů označíme k_0.

Objem řezu $V_t(x)$, jehož průmět na vzorkovací osu odpovídá intervalu $[x; x + t)$, je dán vztahem

$$V_t(x) = \int_x^{x+t} A(y)dy, \tag{1}$$

kde $A(y)$ je funkcí plochy objektu pro vybranou vzorkovací osu. Průměrná hodnota funkce plochy $A_t(x)$, jež zahrnuje řez $[x; x + t)$, je potom dána vztahem

$$A_t(x) = \frac{V_t(x)}{t} \tag{2}$$

Tedy objem zkoumaného vzorku V odpovídá ploše pod grafem funkce $A_t(\cdot)$.

Nechť V_1, Vn označují první a poslední nenulový objem řezů a $V_2, V_3, \ldots, V_{n-1}$ označují prostřední objemy po sobě jdoucích řezů ($V_i \geq 0$). Potom Cavalieriho odhad objemu V je dán vztahem

$$\widehat{V} = \frac{T}{t}\sum_{k\in Z} V_t(z+kT) = (V_1 + V_2 + ... + V_n). \tag{3}$$

Hodnota objemu *i*-tého řezu V_i nezávisí na šířce řezu. Pokud by rovnice (3) byla vyjádřena pomocí funkce $A_t(\cdot)$, dostali bychom vztah

$$\hat{V} = T(A_1 + A_2 + ... + A_n), \tag{4}$$

ve kterém by hodnoty A_i odpovídaly zavedeným plochám řezů.

4.1 Výpočet koeficientu chyby

V našem případě lze považovat koeficient chyby objemu za rovný rozptylu $\mathrm{var}(\widehat{V})$. Odhad objemu $\widehat{V}$ je náhodná veličina, protože závisí na náhodné proměnné *s*, což vyjádříme jako $\widehat{V}(s)$. Z definice platí, že

$$\mathrm{var}\left[\hat{V}(s)\right] = SE^2\left[\hat{V}(s)\right] = \int_0^T \left[\hat{V}(s)\right]^2 \cdot \frac{dz}{T} - V^2 \tag{5}$$

Můžeme tedy použít odpovídající koeficient chyby, neboli

$$CE\left[\hat{V}(s)\right] = SE\frac{\left[\hat{V}(s)\right]}{V} \tag{6}$$

Pro výpočet odhadu *CE* byly použity dvě hlavní metody: empirické převzorkování a teoretický výpočet chyby odhadu.

4.1.1 Empirické převzorkování

Toto je velmi obecný postup, který vždy dává dobrou aproximaci požadovaného rozptylu chyby. Jeho aplikace vyžaduje celkovou znalost funkce plochy A(·). V praxi to znamená, že je požadována série N_o základních řezů, jejichž šířka je co nejmenší. Dále se předpokládá, že se základní množina skládá z N_o řezů o šířce *t* a o objemech {v_1, v_2, ..., v_{1o}}, které reprezentují základní vektor. (Poznamenejme, že některé z prostředních objemů mohou být nulové, pokud objekt není spojitý, přesto je nutné je započítat.) Chceme odhadnout $CE(\hat{V})$ pro danou šířku řezů t a vzdálenost mezi nimi *T*.

Nejprve popíšeme, jak zkonstruovat všechny možné Cavalieriho vzorky řezů pro všechna *t*, *T*, kde $1 \le t \le T < \infty$ a $t, T \in N$. Pomocí nich potom vyjádříme odhad $CE(\hat{V})$.

Pro konstrukci byla zavedena čísla k_0 a *N* jako

$$k_0 = \left\lceil \frac{N_0 + t}{T} \right\rceil, \quad N = k_0 T. \tag{7}$$

Dále byl zkonstruován vektor $\vec{f}$, jehož délka je *N*; prvních *t* členů je rovných nule, pak následuje základní vektor objemů a po něm $N - N_0 - t$ nul. Z vektoru $\vec{f}$ uděláme matici

typu *T* x k_0 tak, že jednotlivé členy zapíšeme po sloupcích. Řádky této matice odpovídají rozhodujícím Cavalieriho vzorkům, které lze sestrojit ze vstupních údajů. Tedy pro *i*-tý Cavalieriho vzorek řezů platí $\{ f_{\mathrm{i}}, f_{\mathrm{i+T}}, \ldots, f_{\mathrm{i+(ko-1)T}}\}$, $\mathrm{i} \in \{1, 2, \ldots, \mathrm{T}\}$.
Objemy všech řezů i-tého vzorku se šířkou *t* jsou $\{V_{il}, V_{i2}, ..., V_{iko}\}'$ $\mathrm{i} \in \{\mathrm{I}, 2, ..., T\}$, kde V_{ij} reprezentují objem *j*-tého řezu *i*-tého vzorku, který odpovídá členu $f_{\mathrm{i+(j-1)T}}$ vektoru $\vec{f}$.

K odhadu objemu vzorku, který je reprezentován k_0 řezy, mezi nimiž je vzdálenost *T*, bylo použito vztahu (4), tj.

$$\hat{V}i = \frac{T}{t} \cdot \sum_{j=0}^{k_0} V_{ij} \qquad i = 1, 2, ..., T.$$

Přesná hodnota objemu zkoumaného vzorku *V* je rovna

$$V = v_1 + v_2 + \ldots + v_{No} \tag{8}$$

Odhad druhé mocniny koeficientu chyby CE^2 pro danou dvojici *t*, *T* lze vyjádřit jako (viz [1])

$$CE^2(\hat{V}) = \frac{1}{TV^2} \cdot \sum_{j=0}^{k_0} (\hat{V}_i)^2 - 1 \tag{9}$$

4.1.2 Výpočet teoretické chyby měření

Další metoda pracuje s jedním Cavalieriho vzorkem; objemy jeho po sobě jdoucích řezů odpovídají množině $\{V_1, V_2, ..., V_{k0}\}$. Hodnoty parametrů *t* a *T* jsou předem dány. Potom platí (viz [1]) následující aproximace

$$\widehat{CE}(\hat{V}) = \sqrt{\alpha\left(\frac{t}{T}\right) \cdot \frac{3\sum_{i=1}^{k_0} V_i^2 + \sum_{i=1}^{k_0-2} V_i V_{i+2} - 4\sum_{i=1}^{k_0-1} V_i V_{i+1}}{\left(\sum_{i=1}^{k_0} V_i\right)^2}} \tag{10}$$

Volba koeficientu $\alpha\left(\frac{t}{T}\right)$ závisí na hodnotě konstanty *m* použité ve funkci plochy A(·) (viz [3], [1]). Pokud splníme podmínku, že počet vzorků je alespoň 5, šířka řezu je co nejmenší a odpovídající části ploch řezů $\{A_1, A_2, ..., A_k\}$ byly změřeny s nepatrnou chybou, je možné aplikovat Kiêu-Souchet formuli:

$$\hat{m} = \frac{1}{\log 4} \cdot \log\left[\frac{3\sum_{i=0}^{k} A_i^2 + \sum_{i=0}^{k-4} A_i^2 A_{i+4} - 4\sum_{i=0}^{k-2} A_i^2 A_{i+2}}{3\sum_{i=0}^{k} A_i^2 + \sum_{i=0}^{k-2} A_i^2 A_{i+2} - 4\sum_{i=0}^{k-1} A_i^2 A_{i+1}}\right] - \frac{1}{2}. \tag{11}$$

m je možné položit buď rovno 0 (pro $\hat{m} < 0.5$), nebo rovno 1 (pro $\hat{m} > 0.5$). Položme $t_T = \frac{t}{T}$, potom pro koeficient $a(t_T)$ platí:

$$\alpha(t_T) = \frac{1}{6} \cdot \frac{(1-t_T)^2}{2-t_T}, \quad m = 0 \tag{12}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{\left[1 + 2t_T - 2t_T^2\right](1-t_T)^2}{40 - 10t_T^2 + 3t_T^3}, \quad m = 1 \tag{13}$$

5 Numerické výpočty

Cavalieriho metoda řezů byla aplikována na 2 vzorky, které byly reprezentovány $N = 72$ řezy o šířce t =5 μm. Objemy jednotlivých řezů odpovídají t násobku jejich plochy, tj. $V_i = tA_i$.
Počítali jsme odhad objemu lézí cévy, která byla reprezentována pomocí $k_0 < N$ řezů. Tyto řezy byly voleny systematickým náhodným výběrem. Pro odhad objemu byl použit vztah (4). Celkové objemy lézí cév, rovnající se $\sum_{i=1}^{N} tA_i$ pro t = 5 μm, jsou následující:

Objem cévy 1345-10-11: $V = 5 \cdot 5.9759 \cdot 10^6$ μm^3 = 29.8795 · 10^6 μm^3
Objem cévy 1345-15-11: $V = 5 \cdot 46.0421 \cdot 10^6$ μm^3 = 230.2105 · 10^6 μm^3

Cavalieriho metoda řezů byla použita pro následující počty vybraných řezů vzorku: 3, 4, 6, 8, 9, 12 a 18, které byly voleny záměrně tak, aby celkový počet řezů vzorku byl jimi dělitelný. Abychom zjistili, s jakou přesností jsou odhady objemu spočteny, bylo potřeba vypočítat chybu měření pro jednotlivé počty vybraných řezů. Pro výpočet chyby byly použity obě výše uvedené metody.

5.1 Empirické převzorkování - výsledky

Pro výpočet odhadu empirické chyby byl použit vztah (9). Aplikace metody je demonstrována na první cévě 1345-10-11, která je reprezentována 9 řezy vybraných systematickým náhodným výběrem. Bylo nutno spočítat hodnoty V_{ij}, které odpovídají objemu j-tého úseku i-tého reprezentanta vzorku. V_{ij} je dáno objemovou funkcí f_k, kterou lze spočítat jako $t \cdot A_k$, kde $k = i + jT/t$. Hodnoty V_i jsou potom rovny součtu objemů jednotlivých úseků i-tého reprezentanta, tj. $V_i = \sum_{j=1}^{k_0} V_{ij}$.

Hodnotu koeficientu chyby CE je možné spočítat jako druhou odmocninu CE^2, která je dána vztahem (9). Nejprve numericky vyjádříme součet objemů V_i a označíme jej $\tilde{V}$:

$\tilde{V}$ = ((28.028)^2 + (26.9)^2 + (32.092)^2 + (30.948)^2 + (30.308)^2 + (31.392)^2 + (30.592)^2 + (28.776)^2) · 10^{12} = 7164.81 · 10^{12}

Vyčíslením vztahu (9) dostaneme hodnotu pro CE^2:

$$CE^2 = \frac{1}{8 \cdot (29.8795 \cdot 10^6)^2} \cdot 7164.815 \cdot 10^{12} - 1 = 0.00315$$

Po odmocnění získáme hodnotu koeficientu chyby CE, který je roven 0.056.

Koeficient chyby CE byl spočítán rovněž pro odhady objemu obou vzorků pro různé počty řezů. Odhad objemu vzorku je dán vztahem (4). Výsledné hodnoty CE pro jednotlivé počty řezů byly vyneseny do grafu (viz obr. 2).

5.2 Teoretická chyba - výsledky

Pro výpočet odhadu teoretické chyby byl použit vztah (10). Aplikace metody je demonstrována na první cévě 1345-10-11, která je reprezentována 9 řezy vybraných systematickým náhodným výběrem. Hodnoty *t* a *T* jsou dány, tj. $t = 5\ \mu\text{m}$ a $T = 40\ \mu\text{m}$ a jejich podíl $t_T = \dfrac{t}{T} = 0.125$. Byly tedy vybrány řezy s následujícími obsahy A_j, které odpovídají této množině $\{A_1, A_9, A_{17}, A_{25}, A_{33}, A_{41}, A_{49}, A_{57}, A_{65}\}$. Ve vztahu se pracuje s hodnotami V_j, které byly spočítány jako $V_j = T \cdot A_j$.

Nejprve je potřeba určit koeficient $\alpha(t_T)$ na základě hodnoty $\hat{m}$. Dosazením do vztahu (11) získáme

$$\hat{m} = \frac{1}{\log 4} \cdot \log\left[\frac{(3 \cdot 0.063 + 0.0288 - 4 \cdot 0.04) \cdot 10^{12}}{(3 \cdot 0.063 + 0.04 - 4 \cdot 0.0468) \cdot 10^{12}}\right] - \frac{1}{2} = -0.3575$$

Protože hodnota $\hat{m}$ je menší než 0.5, pro výpočet $\alpha(t_T)$ použijeme vztah (12). A tedy

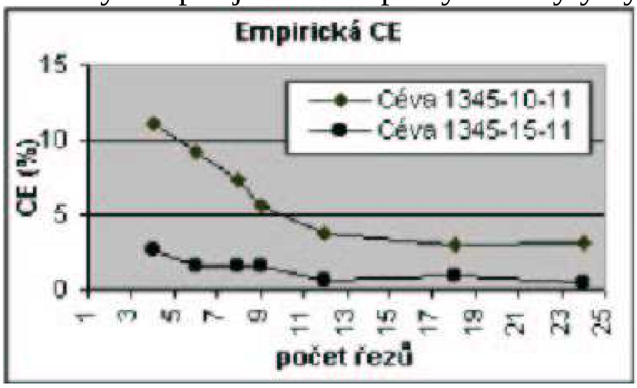
$$\alpha(t_T) = \frac{1}{6} \cdot \frac{(1-0.125)^2}{2-0.125} = 0.06806 \qquad (15)$$

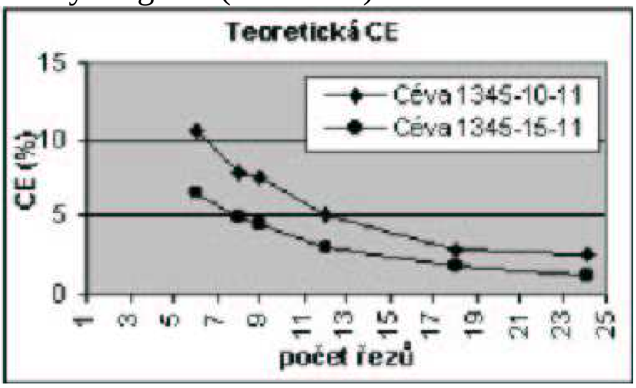
Nakonec už zbývá jen dosadit do vztahu (10) a získáme hodnotu teoretické chyby $\widehat{\text{CE}}$.

$$\widehat{CE}(\hat{V}) = \left[0..6806 \cdot \frac{3 \cdot 1.574 + 0.9997 - 4 \cdot 1.1705) \cdot 10^{12}}{(3.5035)^2 \cdot 10^{12}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Vyčíslením získáme hodnotu $\widehat{CE}$ rovnu přibližně 7.6 %.

Koeficient teoretické chyby $\widehat{CE}$ byl spočten rovněž pro odhady objemu obou vzorků; každý ze vzorků byl reprezentován různými počty řezů. Počty reprezentujících řezů byly 6,8,9,12,18 a 24. Odhad objemu vzorku je dán vztahem (4). Výsledné hodnoty *CE* pro jednotlivé počty řezů byly vyneseny do grafu (viz obr. 2).





Obrázek 2: Graf empirického odhadu CE (vlevo) a graf teoretického odhadu CE (vpravo)

6 Závěr

Při použití odhadu objemu aterosklerotických lézí v cévách králíků a následném zkoumání přesnosti tohoto odhadu byly vybrány dvě série řezů z různých cév. Vzorek cévy 1345-10-11 byl pořízen v počátečním a vzorek 1345-15-11 už značně pokročilém stádiu sklerózy. Tato skutečnost je zřejmá z rozdílných hodnot objemu lézí obou vzorků. Z výsledků výpočtu koeficientu chyby CE vypočtené metodou empirického převzorkování (viz první graf na obr. 2) lze pozorovat, že hodnoty CE mají klesající charakter pro zvyšující se počet reprezentujících řezů. Hodnoty CE pro vzorek 1345-15-11 jsou mnohem menší než pro vzorek 1345-10-11, což je právě dáno minimálními rozdíly v obsahu lézí zachycených na snímcích jednotlivých řezů. Z grafu dále vyplývá, že pokud nemá být překročena hranice 5 %, je potřeba uvažovat minimálně 10 reprezentujících řezů vzorku. Výběr reprezentujících řezů by měl být systematicky náhodný.

V praxi se mnohem častěji používá metoda teoretického výpočtu CE odhadu objemu, která velmi závisí na hodnotě konstanty *m* (viz [3]). Z výsledku zachyceného v druhém grafu na obr. 2 lze vypozorovat, že hodnoty CE mají pro zvětšující se počet řezů klesající charakter. Hodnoty CE pro vzorek 1345-10-11 jsou opět větší než pro vzorek 1345-15-11. Pro nepřekročení hranice CE 5 % je potřeba vzít alespoň 12 reprezentujících řezů (jejich
výběr by měl být systematicky náhodný).

Hodnoty koeficientu CE vypočtené oběma metodami se příliš neliší (zvláště pro vzorek 1345-10-11, u kterého je možná odchylka při odhadu objemu větší). Lze tedy učinit následující závěr. Při Cavalieriho odhadu objemu aterosklerotických lézí v cévách králíků s 5% přesností je potřeba použít 12 řezů.

Reference

[1] McNulty V., Cruz-Orive L. M., Roberts N., Holmes C. J., Gual-Arnau X. (2000): Estimation of Brain Compartment Volume from MR Cavalieriho Slices. J *Comput Assist Tomogr*, Vol. 24, No. 3,466-477.
[2] Nachtigal P., Semecký V., Gojová A., Kopecký M., Beneš V., Jůzková R. (2002): The application of Stereological Methods for the quantitative analysis of the atherosclerotic lesions in rabbits. *Image Analysis & Stereology*, Vol. 21, No. 3, 165-173.
[3] Kiêu K. (1997): Three lectures on systematic geometric sampling. Memoirs no. 13. Department of Theoretical Statistics, Institute of Mathematics, University of Aarhus.

Psychologické aspekty výuky a studia matematiky

Stanislav Nečas, Soukromá vysoká škola ekonomických studií Praha

V předminulém století jeden moudrý Francouz jménem Auguste Comte sestavil schody důležitosti věd, udělal to při příležitosti položení základů tehdy nově koncipované vědy – sociologie, za jejíhož zakladatele je považován. Na stupínek nejnižší postavil matematiku, na nejvyšší sociologii. Snad mu můžeme my, účastníci dnešní konference, takové hodnocení matematiky v jeho pojetí odpustit či tolerovat a současně se zamyslet nad tím, jak by hierarchie věd vypadala dneska. Pro mnoho studentů je dnes patrně matematika obtížnější a náročnější než sociologie. Mj. proto, že žijí a vyrůstají v sociálním, tedy společenském prostředí. Společnost je obklopuje intenzivně, nápadně a častěji než matematika. I když ne tak docela – matematika nás obklopuje ve formě domů, mostů, věží, lanovek, podzemní dráhy apod.

Vezměme si na pomoc další společnici – totiž psychologii – a pokusme se nastíněné dilema vyřešit.

Poznávání člověka se v procesu jeho vývoje orientuje na živou přírodu, neživou přírodu a lidskou společnost. Člověk po dobu svého vývoje tvořil a komunikoval, přitom používal informace. Současnost postuluje vědeckou fundovanost, jakož i schopnost přetvářet sebe, své okolí. Otázkou využití informace v sociální sféře se zabývají také prof. V. Porada a RNDr. J. Požár, když vysvětlují možnosti využití informací v oblasti policejní práce ve sborníku Bezpečnostní teorie a praxe vydaném Policejní akademií ČR.

K otázce vzdělání a výchovy se zajímavým způsobem vyjadřuje kolega z naší školy doc. B. Sekerka ve svém vystoupení zveřejněném ve sborníku Vysoké školy finanční a správní v Praze pod názvem Lidský kapitál a investice do vzdělání v procesu rozvoje společnosti. Akcentuje výchovu obecně a mravní zvláště. Jako matematik, opíraje se o díla filozofů si všímá vztahu jedince s ostatními lidmi v čase a prostoru, kdy jedinec je součástí různých společenských uskupení – rodina, zaměstnání, přátelé apod.

Vraťme se k původnímu problému a položme si otázku, jaký je a jak probíhá myšlenkový rozvoj člověka?

Jedním z důležitých činitelů v ontogenezi je postup od synkretického nazírání a myšlení k analytickému, od komplexní celistvosti k diferenciaci v části. Synkreze se řídí zákonem postupné analýzy, který platí pro všechna věková období pro vnímání nových předmětů.

Podstatný rozvoj percepce v pubescenci je umožněn rozšířením analytické schopnosti. Pro rozvoj analyticko-syntetického pochodu jako základu myšlení má řeč význam jen po stránce symbolické ve smyslu II. signální soustavy, v ní má důležitou roli početní symbolika, jež je v možnostech jen člověka. Početní schopnosti od věci k symbolu a od intuitivního pochopení k pojmu má svůj růstový gradient. Počítání je v předškolní době spjato s činností a hravým zaměstnáním, na 1. školním stupni je mimo osobnost, jsou spíše úlohou než spontánní činností.

Ontogenetická cesta ke skutečnému pojmovému chápání kvantity je dlouhá, je založena na mnohonásobném zjemňování diferenciace z původního komplexního názoru. Když u dítěte ještě splývá subjektivní s objektivním, pokud se zaměřuje k věcem a žije ve věcech, v zacházení s objekty, nemůže mít číslo v jeho životě izolovanou úlohu. Číslo není vlastností věcí, ale je výsledkem pochopení vztahů, kombinací a jejich uspořádání. Číslo je psychický produkt, je to rozumový pochod, nikoli smyslový fakt. Početní myšlenka má za základ materiální skutečnost. (dítě při rodinné večeři nepočítá přítomné, ale sdělí, že chybí strýc Pepa, tedy číslo není odděleno od předmětů, nýbrž vytváří komplex individualit. U primitivní mysli je prvním krokem k pojetí čísla věcný základ. Každá diferenciace je analýzou celku, nejdříve podvědomou a jednoduchou, postupně se stává bohatší, vědomější. Pojetí čísla předpokládá něco společného, a tím se vytváří celek nebo systém.

Číslo je složitá abstrakce, předpokládá rozlišení celku od jiných celků. U dětí ve věku 3 – 6 let umí dát dítě pojmenování číselné skupině, ale umí i verbální řadu čísel, např. zná už některé rytmické průpovídky – jedna, dva, tři – my jsme bratři apod.

Pro psychologické pojetí problému je podstatné jak předškolní děti chápou předložený počet předmětů. Toto je důležité pro elementární vyučování počtům. Základem počítání u těchto dětí jsou přirozené skupiny věcí, číselné útvary jako specifické spojení předmětů.

Vstupem do školních lavic se přístup k číslu mění, stává se umělým pochodem a prací, od 6 do 11 let dítě se postupně odpoutává od předmětů a dospívá k čistému číslu, analytický názor vede k chápání množství bez předchozích vlastností.

Rozvoj počítání je podporován obohacováním řeči při pojmenování čísel a operací, avšak zejména spojením početní mechaniky s problémovými situacemi. Prepubescent tedy musí řešit početní úlohu nejdříve tím, že provede její analýzu, dále musí určit, která operace povede k řešení úlohy, text úlohy musí být tedy diferencován v prvky.

Podle Jeana Piageta, významného francouzského psychologa, který se zabýval psychologií inteligence, každý psychologický výklad ontogeneze člověka se musí opírat o biologii, logiku či sociologii. Neurologie nevysvětlí proč 2 + 2 jsou 4 nebo proč zákony dedukce se naší mysli vnucují jako nutné. Jiný směr uvažování pokládá logické a matematické vztahy za původní a podřizuje jim analýzu vyšších intelektuálních funkcí. Problém se nachází právě v rovině, zda logika, která má osvobodit od pokusů o experimentálně psychologický výklad svých jevů, může vysvětlovat jevy v psychologické zkušenosti. Formální logika je prostě axiomatikou stavů rovnováhy myšlení a reálná věda je právě psychologie myšlení.

Psychologicky vyložit inteligenci představuje sledovat její vývoj a ukázat, jak tento vývoj nakonec vede k rovnováze. Psychologie se dá přirovnat k embryologii, zpočátku je popisná, analyzuje fáze a periody morfogeneze až dospěje ke konečné rovnováze v morfologii dospělého člověka.

Zvažme v této souvislosti i společenské faktory rozumového vývoje. Lidská bytost je od narození ponořena do společenského prostředí, které na ni působí stejně jako prostředí fyzikální. Společenský život přeměňuje inteligenci trojím způsobem:

- prostřednictvím jazyka (znaků),
- obsahem styků (intelektuálních hodnot)
- pravidly ukládaných myšlenek (kolektivních logických norem)

Intenzita duševního vývoje a jeho správný směr jsou závislé vedle procesů zrání mozkové kůry na podmínkách, v jakých dítě žije. Mládež primitivních národů, vyrůstající od raného dětství v podmínkách civilizace, dosahuje vyššího stupně duševního rozvoje než její vrstevníci žijící stále v primitivních poměrech. Na duševní vývoj má významný vliv škola obsahem a metodami vzdělávání. Předměty jako jsou algebra, fyzika, matematika, mluvnice formují značně abstraktní myšlení, vedle toho dějepis, biologie formují dialektické myšlení. Rodiče, které děti odbývají v jejich zvídavých odpovědích, brzdí jejich rozvoj.

Proč jedni lidé mají vyhraněné zájmy, druzí nikoli? Určitý význam pro rozvoj zájmů a aktivity lidí má speciální nadání a schopnosti. Mládež, která projevuje nadání pro matematiku, fyziku, biologii dosahuje na tomto poli úspěchů. To je povzbuzuje k dalšímu úsilí a často rozhoduje o volbě povolání. Podobně hudebně, výtvarně či technicky nadaná mládež vidí před sebou vymezenou životní dráhu. Není to však vždy věcí schopností. Někdy vznikají zájmy z touhy podobat se známým osobnostem, uznávaným vzorům, např. otec je dobrým lékařem, dítě jde v jeho stopách, strýc je pilotem, synovec modeluje letadla, navštěvuje letecké závody až se stane rovněž pilotem aj.

A jak je to s matematikou v myslích a představách naší mládeže? Pokusil jsem se podnítit studenty naší střední školy k úvaze o roli matematiky v systému jejich vzdělávání. Jejich názory lze vyjádřit stručně takto:

- matematiku nevyhledávám, ani nebudu, ale nevadí mi, rozvíjí logické myšlení, je snadno aplikovatelná v řadě vědních disciplin, člověk si k ní musí vybudovat určitý vztah
- matematika se přeceňuje, měla by být pro ty, kteří se jí chtějí zabývat, ne pro ty, kteří mají zájem o obchod, marketing, diplomacii a mezinárodní vztahy
- na ZŠ jsem měl matematiku rád, na střední jí trpím, můj výběr VŠ byl veden hlavní myšlenkou – hlavně, aby tam nebyla matematika
- myslím, že lidi se dělí na ty, kteří mají rádi matematiku a na ty, kteří nikoli, domnívám se, že na střední škole by neměla být klíčovým předmětem
- podle mne by matematika měla být volitelným nebo povinně volitelným předmětem, aby si každý student mohl zvolit míru matematického vzdělání, tím není myšleno pouze sčítání, odčítání, násobení a dělení
- volím VŠ, kde není matematika, zejména u přijímacích zkoušek
- nemám matematické myšlení
- vztah k matematice u mne závisí velmi na osobnosti učitele, myslím, že bych z ní neodmaturoval
- matematika je opakem biflování, zapojuje mozek a logiku, její pozice v systému vzdělávání je pro mne neutrální
- tento předmět mě baví, na vysokých školách s ekonomickým zaměřením by rozhodně měla být, ekonom bez matematiky nemůže existovat

Obdobná úvaha, o niž byli požádáni studenti naší vysoké školy, přinesla následující pohledy na problematiku:

- studenti naší VŠ se dají dle mého soudu, uvádí jedna ze studentek, rozdělit z hlediska jejich přístupu, resp. znalostí matematiky na dvě skupiny – absolventy gymnázií a absolventy obchodních akademií, na gymnáziích se matematikou zabývali více do hloubky, pro studenty z OA bývá výklad matematiky často nepochopitelný, bývají ztraceni při výkladu
- matematika je předmětem podle mého názoru velmi specifickým, nerozumné by bylo tvrdit, že je složitý či dokonce nezvladatelný. Sám jsem měl na Soukromé vysoké škole ekonomických studií v tomto předmětu problémy, ale jsem dalek tvrzení, že je nezvládnutelný. Jsou bohužel i studenti, kteří si myslí, že matematiku se učí proto, aby složili příslušnou zkoušku a poté ji úspěšně a rychle zapomněli. Tak to však ani být nemůže – např. vlastníme-li určité akcie, bude nás zajímat nejen dnešní, ale i jejich budoucí hodnota.
- při výkladu matematiky je dobře se napřed přiblížit k základnímu stavebnímu kamenu a pak se můžeme učit matematické vědě a její aplikaci v praxi
- věřím, že matematika je věda, kterou je možné udělat atraktivní právě specifickým přístupem k výuce, ke studentům, aby se student orientoval v aplikaci matematiky v každodenní praxi

Na základě výše uvedeného lze shrnout, že výuka a z druhé strany vzato i studium matematiky jsou podmíněny řadou faktorů – od osobnostních – psychologických, sociologických, medicínských až po pedagogické aj.

Tyto faktory v procesu výuky a studia matematiky hrají podstatnou roli jak na straně vyučujících, tak i studentů.

Použitá literatura:

Příhoda, V., *Ontogeneze lidské psychiky*. Praha : SPN, 1963.

Piaget, J., *Psychologie inteligence*. Praha : SPN, 1970.

Lapinská, R., *Psychologie dospívání*. Varšava : PZWS, 1966.

Holas, E., *Kapitoly zo všeobecnej psychológie – myšlenie*. Bratislava : SPN, 1970.

Klementová, R., Nečas, S., *Manažer a stres*. Brno : ČS,a.s., 2000.

Možnosti matematizace bezpečnostní činnosti

Josef Požár, Policejní akademie ČR Praha

Úvod

Vzhledem k tomu, že celá naše civilizace hledá cestu jak trestné, protispolečenské a teroristické činnosti účelně čelit, pokusíme se v této práci prezentovat netradiční pohled na matematizaci a kvantifikaci komplexní bezpečnosti jako účinný nástroj v boji proti tomuto fenoménu. V minulosti bylo již popsáno mnoho knih a statí z různých vědních disciplín jak se bránit proti této velice škodlivé činnosti jednotlivců, skupin či diktátorských režimů. Je tomu tak nejenom v právní, politické, informační, kriminalistické oblasti, ale je třeba tento problém komplexně. Jistým přínosem, příspěvkem je poznání příčin a důsledků je pokus o matematizaci činnosti za omezujících podmínek.

Cílem příspěvku je poukázat na možnosti, podmínky a omezení matematizace (formalizace) bezpečnostní činnosti a v neposlední řadě uvést vybrané aplikace matematického pojetí bezpečnostní činnosti. Rozebereme také potřebu matematizace a kvantifikace komplexní bezpečnosti, kdy je tato bezpečnost nadsystémem bezpečnostní činnosti.

Odůvodnění této potřeby vidíme z těchto globálních aspektů:

- **rychlost vnějších i vnitřních změn** je natolik velká, že bez kvantifikace, matematizace a analýzy bezpečnostních informací nelze bezpečnost řídit, predikovat její vývoj a dostatečně rychle detekovat ohrožení, včetně eskalace a přijmutí protiopatření,
- **nárůst globálních rizik** pro ohrožení všech aktiv společnosti - globalizace zločinu a terorismus,
- **nové netriviálně predikovatelné hrozby a zranitelnost aktiv**, vznikající kombinací lehké dostupnosti nových technologií a globalizačních produktů (např. nové formy terorismu, fraudu apod.),
- **nerovnoměrné rozdělení aktiv**, tj. kapitálu ve společnosti i v celosvětovém měřítku zvyšuje pravděpodobnost hrozby a fraudů působících na koncentraci aktiv,
- **e-všechno** (nebo mobilní e-všechno) v informační společnosti s dynamikou výzkumu v IT/IS dělají kapitál informačně a elektronicky zranitelný ve zlomcích sekundy škále (elektronické tunelování, informační terorismus apod.),
- **samotná bezpečnost je důležité aktivum společnosti**, tj. vysoká úroveň komplexní bezpečnosti ve společnosti zvyšuje její finanční hodnotu i důvěryhodnost a prevence je vždy levnější, než odstraňování následků velké havárie, popřípadě likvidace všech aktiv společnosti,
- **komplexní bezpečnost**, tj. neoddělitelně provázaná bezpečnost IS/IT s korporátní bezpečnostní je časově proměnným a dynamicky se měnícím složitým systémem. Jeho narušení může být pro společnost fatální - ztráta majetku a životů, postavení na trhu, zákazníků, image včetně legislativních dopadů a reakce akcionářů. Za pozornost stojí zejména sdělení S. Nečase, který se zabývá bezpečnostní politikou

bankovního domu.[1]

- **komplexní bezpečnost je v průniku všech částí, činností a existence celé společnosti**.

Pokusíme se zodpovědět otázky, proč, jak a zajatých omezujících podmínek lze aplikovat exaktní metody v bezpečnostní činnosti. Nedílnou roli pro realizaci tohoto nástroje matematizace a kvantifikace k hodnocení komplexní bezpečnosti, který jediný umožňuje její řízení a predikci jejího vývoje včetně nových rizik, a to v rychlosti změn všech faktorů, bezpečnost ovlivňujících v časové vývoji.

Jedině řízení a predikce vývoje bezpečnostní činnosti v reálném čase umožňuje dostatečně rychlé vyhodnocení akutních hrozeb a rizik, eskalaci informací a bezpečnostních protiopatření tak, aby bylo zabráněno havariím, fraudu, teroristickým útokům apod.

1. Pojem a podstata bezpečnostní činnosti

Různorodost problematiky bezpečnostní činnosti vyžaduje i různorodost aplikace matematických metod a jejich kombinací a úprav. Proto nelze přímo bez vhodných korekcí aplikovat současné matematické metody na řešení a řízení bezpečnostní činnosti. Proto je také nezbytné v těsné návaznosti rozvíjet jak teoretickou stránku tvorby modelů bezpečnostní činnosti v souladu s rozvojem jejího praktického charakteru. Je tedy možné nalézt jisté společné motivační hledisko, které vede ke shrnutí různých matematických oborů, použitelných k modelování bezpečnostní činnosti do jednoho komplexu. Tento komplex budeme nazývat matematika činnosti.

Matematiku činnosti navrhl již v roce 1975 Katětov jako název pro souhrn matematických disciplín zabývajících se problematikou činnosti s důrazem na tu činnost, která připomíná či imituje lidskou činnost např. rozhodování, řízení procesů, hodnocení, zpracování informací apod. Někdy jsou tyto disciplíny připojovány ke kybernetice, computer science apod.

Použití slova činnost předpokládá, že uvažujeme o jakémsi aktivním prvku, činiteli, subjektu činnosti. Takovým aktivním prvkem může být organizace, její management, zaměstnanci, aj. Vlastní činnost chápeme jako složitý proces, sestávající se z opakovaného uvažování o akcích a provádění akcí. Provádění akcí lze v této souvislosti považovat za víceméně technickou záležitost, kdežto uvažování o akcích před nás staví četné nové otázky teoretického charakteru.

Poněkud neurčitý pojem akce má v modelování bezpečnostní činnosti velmi přirozenou interpretaci. Je to jeden z možných elementárních zásahů subjektu činnosti do okolního prostředí. Toto prostředí je popsáno stavovým prostorem. Obecně lze stavový prostor definovat jako dvojici $\Sigma = (S, \Phi)$, kde **S** = $\{s_i\}_{i=1}^{n}$ je množina stavů a **Φ** = $\{\varphi_j\}_{j=1}^{m}$ je množina operátorů, čili parciálních zobrazení množiny stavů do sebe, kde **i, j** $\in$ **N** jsou přirozená čísla. Jedna z možností jak budovat matematiku činnosti na primitivním pojmu akce je založena na koncepci stavového prostoru. K danému stavu **s**$\in$ **S** a operátoru **φ**$\in$ **Φ** může (ale nemusí) být definován nový stav **φ(s)** $\in$ **S**. Každou akci chápeme jako operátor na množině stavů.

[1] NEČAS, S. *Příspěvek k bezpečnostní politice bankovního domu.* Praha: SVŠES, 2003, s. 157 – 163.

Při seskupování akcí hledáme posloupnost akcí, tj. posloupnost operátorů φj ve stavovém prostoru Σ, které odpovídá úspěšná cesta, tj. cesta od daného počátečního stavu so$\in$ S do jednoho ze stavů cílové množiny G$\subset$ S.

Úkolem při řešení určitého problému bezpečnostní činnosti je vyhledat alespoň jednu úspěšnou cestu při minimální znalosti stavového prostoru. Z hlediska seskupování akcí jsou základní matematickou entitou konečné posloupnosti.

Označíme-li si, sj $\in$ S, $\forall$ i$\neq$j dva různé stavy, pak akcí rozumíme aij = (si, sj) přechod ze stavu si do stavu sj. Posloupnost j-té akce lze vyjádřit Aj = $\{s_{ij}\}_{i=1}^{n}$. Takových posloupností v obecném případě existuje nekonečně mnoho. Z tohoto systému posloupností pak hledáme takovou optimální posloupnost Aj, která zaručuje efektivní splnění úlohy. Celá tato teorie je sice správná, ale v praxi neumožňuje naplnit model konstantami a tedy chybí sémantika akcí a činnosti.

Teprve nyní je třeba vyjasnit pojem bezpečnostní činnost. V odborné, zejména právní a kriminalistické literatuře se tento pojem vyskytuje velmi často. Je však chápán v různých prací také rozdílně. Pro naše účely je třeba tento pojem chápat ve dvou významech. Je to odvislé na objektu poznání, jeho rozsahu a účelu. Je ho především pojímat ve dvou významech. Jedná se především o pojem bezpečnostní činnost v širším a užším slova smyslu.

Bezpečnostní činnost v užším slova smyslu chápeme jako činnost orgánů činných v trestním řízení ve smyslu trestního zákona a trestního řádu. Tato bezpečnostní činnost se někdy nazývá kriminalisticko bezpečnostní činnost. Pak tedy pod bezpečnostní činností rozumíme systém řídících, organizačních, kriminalistických úkonů a opatření realizovaných subjekty bezpečnosti za účelem ochrany pořádku, života, zdraví a majetku. Subjektem bezpečnostní činnosti rozumíme organizaci, management firmy, zaměstnance, kteří zabezpečují ochranu společnosti, jednotlivce

Bezpečnostní činnost v širším slova smyslu pak chápeme jako soubor, systém opatření orgánů státu, organizace, firmy i jednotlivce za účelem ochrany a obrany před napadením fyzickým, psychickým, finančním a jiným, kdy těmto subjektům hrozí při jistých operacích a procesech potenciální škoda.

V tomto kontextu jsou pod hrozbami chápány možné útoky, jejichž cílem je získat informace subjektu o aktivitách a využít situace a ty pak napadnout a způsobit mu škodu. Tato škoda může být finanční (krádež, loupež, padělání dokumentů apod.). Proto také můžeme podle různých hledisek členit útoky proti různým objektům. Jedná se především o:

- útok proti fyzické integritě (trestné činy proti životu a zdraví – vražda, ublížení na zdraví),
- útok proti svobodě (loupež, vydíráni aj.),
- útok elektronický – napadení počítačové sítě viry, hackování, cracking aj,
- útok teroristický – úmysl poškodit ústavní zřízení republiky tím že jiného úmyslně usmrtí nebo se o to pokusí, nebo zmocnění se rukojmí,
- útoky proti hospodářské kázni a daňové úniky.

V bezpečnostní činnosti jsou důležitá taktická a technická hlediska odhalování, objasňování, a vyšetřování trestných činů považována za jednu ze stěžejních otázek kriminalistické teorie a praxe. Právě otázka úspěšnosti bezpečnostní činnosti je založena na relevantních informacích, které vedou k vyšetření trestné činnosti a usvědčení pachatele s potřebnými důkazy. Získávání těchto důležitých informací se realizuje kriminalistickými metodami a prostředky, včetně kvantitativních metod. V poslední době s rozvojem informační a komunikační techniky se začínají využívat i metody statistického zpracování a kriminalistických evidencí za využití počítačových sítí.

2. Podmínky a omezení matematizace bezpečnostní činnosti

Dnes již málokdo pochybuje o tom, že matematizace má velké aplikační možnosti v technických a přírodních vědách. V tomto příspěvku pojednáme o možnostech aplikace matematických metod v bezpečnostní činnosti, pokusíme se poukázat na úskalí a omezení těchto metod v tak složitém sociálním fenoménu jakou je bezpečnostní činnost. Dosud se v kriminalistické vědě využívá matematických metod jen ve velmi přesně vymezených případech jako tomu je v kriminalistické identifikaci a měření, tedy zejména v kriminalistické technice. Méně tomu tak je v kriminalistické metodice a zvláště kriminalistické taktice. V současné době se již využívá matematických metod v písmoznalectví, daktyloskopii, kriminalistické identifikaci a měření, balistice a mechanoskopii. Stejně tak tomu je i ve vyšetřování trestné činnosti a dalších odvětvích kriminalistiky.

Ve složitosti objektu zkoumání, kterým bezpečnostní činnost je, vede k obtížné aplikaci matematických, kybernetických a jiných kvantitativních oborů. Tato složitost se v bezpečnostní činnosti projevuje v těchto faktorech:

- pravděpodobnostní, neurčité chování objektů bezpečnostní činnosti,
- složitost a rozsáhlost sociálně ekonomických procesů a systémů,
- rostoucí složitost informačních procesů bezpečnostní činnosti,
- výskyt nových hrozeb a rizik,
- latence útoků na bezpečnostní subjekty – stát, organizace, skupiny, jednotlivce apod.,
- neúplnost a neurčitost řídících informací pro rozhodování,
- náhodný charakter jevů, stavů a procesů,
- apriorní neznalost zákonů rozložení parametrů,
- výskyt desinformace a metainformací o objektech a s tím související potíže při vyhledávání relevantních informací[2].

Za těchto podmínek mohou být velmi obtížně používány dosud známé metody a přístupy matematiky a kybernetiky. Proto bezpečnostní činnost tvoří systém, který je vzájemně propojený svými prvky a vazbami s okolím a do okolí také zasahuje. Pro lepší představu je vhodné a potřebné rozložit tento systém na subsystémy, které se mohou vzájemně překrývat a dublovat. To tedy znamená, že každé dva podsystémy X

[2] STONE, L.D. Theory of optimal search. New York: Academic Press, 1975.

a Y nemusí být disjunktní, tj. $X \bigcap Y \neq \varnothing$. Musí však platit, že sjednocení všech podsystémů bezpečnostní činnosti S pokrývá celý systém S, tj. $\bigcup_{i=1}^{n} X_i = S$.

Podsystémy bezpečnostní činnosti mohou být následující:

- podsystém fyzické bezpečnosti (mříže, zámky, fotobuňky, UV detektory aj.),
- podsystém personální bezpečnostní činnosti (výběr vhodných pracovníků, jejich prověrka, školení a vzdělávání zaměstnanců aj.),
- podsystém detekce a odhalování možných hrozeb a rizik (bezpečnostní politika, risk assesment,
- podsystém HW a SW bezpečnostní činnosti (viry, firewally, kryptografie aj.),
- podsystém právní stránky bezpečnostní činnosti (zákony, normy, interní normativní akty aj.),
- podsystém managementu bezpečnostní činnosti a další podsystémy.

V popisu bezpečnostní činnosti se využívá metody matematického modelování. Jak již bylo výše popsáno, je to však velmi obtížné a vyplývá z výše uvedeného, že právě složitost procesů, operací v bezpečnostní činnosti se projevuje v řadě činitelů. Je to především již zmiňovaná velká neurčitost, možná nemožnost přiřazení pravděpodobnosti výskytu či chybná nebo dokonce nemožná předpověď daného jevu, procesu aj. Dále se jedná o stochastické procesy, kde vedle určitých, determinujících faktorů se více vyskytují právě jevy náhodné. V neposlední řadě se v bezpečnostní činnosti vyskytuje nedostatek a neúplnost relevantních informací, který probíhal. V tomto směru je právě kriminalistická věda velmi obtížná, neboť se jedná o děje, které nastaly v minulosti a musí se důkazními prostředky potvrdit a právně prokázat, že tak pravděpodobně probíhaly.Zde existují známé kriminalistické metody jako rekonstrukce, vyšetřovací pokus, výslech svědků, poškozeného aj. Z hlediska managementu bezpečnostní činnosti je řízení odhalování a objasňování protispolečenských jevů a trestných činů obtížné z hlediska multikriteriálního rozhodování o problému. To je způsobeno právě lidským činitelem, který je subjektem a objektem řízení.

Z výše uvedených faktorů bezpečnostní činnosti pak složitost matematizace bezpečnostní činnosti souvisí s:

- mnohofaktorovostí jevů a procesů,
- subjektivním činitelem (člověkem), který podmiňuje jejich stochastičnost,
- faktory a podmínkami, které vymezují bezpečnostní činnost, se obvykle skládají z kvalitativních příznaků, jež lze poměrně obtížně kvatitativně popsat než procesy technické a přírodní,
- procesy v bezpečnostní činnosti, které se neustále mění, takže se nedají postihnout v mezích jednoho modelu.

Tyto závěry plně platí pro téměř většinu jevů a procesů bezpečnostní činnosti.

3. Oblasti možné matematizace bezpečnostní činnosti

V dalším textu si uvedeme některé aplikace matematických metod v bezpečnostní činnosti. Jsou to dosud publikované a pro kriminalistickou veřejnost známé postupy a návrhy řešení $[2,3,4]$. Jedná se především o tyto aplikace:

3.1 Matematizace způsobu spáchání a utajení trestného činu

V současném období se kriminalisté zabývali zejména otázkami podstaty, determinance, detekce, identifikace a opakovatelnosti způsobu spáchání a utajení trestných činů a otázkami vymezení objektivních a subjektivních faktorů při činnosti pachatelů. Při tomto zkoumání se dosud využívá množinový počet, kdy se definují množiny:

Objektivní faktory: O = $\{o_i\}_{i=1}^{n}$, např. místo, čas, způsob ochrany objektu apod.

Subjektivní faktory: S = $\{o_j\}_{j=1}^{m}$, např. osobnostní vlohy, zručnost, znalosti prostředí, zkušenosti apod.

Pachatel vybírá pouze některé vhodné faktory $O_p \subset O$, kde O_p je množina vhodných (příznivých) objektivních faktorů, $S_p \subset S$, S_p množina vhodných (příznivých) subjektivních faktorů. Přitom logicky platí, že $O_p \cap S_p = 0$. Pachatel v přípravné fázi i při vlastním páchání trestného činu pak způsob spáchání je odvislý od souhrnu faktorů $O_p \cup S_p$.

Tento přístup je však velmi zjednodušený a samozřejmě vykazuje mnoho nepřesností, neboť ve skutečnosti se jedná o fuzzy množiny a pak způsob provedení skutku je odvislý nejen na subjektivních a objektivních faktorech, ale na zcela náhodném postupu a sledu událostí v místě a čase.

Jinou otázkou je, že pachatel zanechává na místě činu stopy (daktyloskopické, DNA, mechanoskopické aj.) Proto v bezpečnostní činnosti v užším slova smyslu vyšetřovatel, detektiv postupuje od těchto stop a konstrukcí na podkladě stop a způsobu spáchání trestného činu dojde k objasnění a dokázání trestného činu. Není tomu tak jen v trestné činnosti, ale i obecné protispolečenské činnosti, kdy skutek nevykazuje formální znaky trestného činu (např. hackeři, fraudy aj. Vzhledem k nedostatku prostoru je tento přístup popsán v kriminalistické literatuře.[3]

3.2 Matematizace úlohy pronásledování

Úloha pronásledování byla zejména formulována pro vojenské účely. Zde byly stanoveny dva prvky: subjekt pronásledování P a objekt pronásledování E.[4] Pak je třeba, aby P dostával relevantní informace o stavu objektu E. V praxi to znamená, že P pronásleduje E po stopě, má informace o jeho stavu v minulosti.

Objekt se nazývá řízený, jestliže jeho stav je určen vektorem fázového prostoru a jeho pohyb je popsán vektorovou diferenciální rovnicí

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x}, \mathrm{u}), \qquad (1)$$

[3] PORADA, V. POŽÁR, J. KONRÁD, Z. *K některým možnostem zkoumání způsobu spáchání a utajení trestného činu*. Čs. kriminalistika, 14, 1981, č.1, s. 50 - 55.

[4] Toto označení je odvozeno z anglických slov Pursuer a Evader.

kde $\vec{x}$ je vektor, který definuje stav objektu a u je řídící parametr. Rovnice (1) neudává konkrétní pohyb objektu, ale pouze technické možnosti jeho pohybu.

V úloze pronásledování se zkoumají dva objekty P, E. Stejně tak je popsán rovnicí i objekt E

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = g(\vec{y}, v), \tag{2}$$

kde $\vec{y}$ je vektor, který definuje stav objektu E a v je řídící parametr.

Při rozboru úlohy pronásledování je vhodné spojit obě rovnice (1), (2) v jednu tím, že oba vektory $\vec{x}$, $\vec{y}$ spojíme v jeden $\vec{z} = (\vec{x}, \vec{y})$, tj. utvoříme součet fázových prostorů v jediný prostor R. Pak plyne

$$\frac{d\vec{z}}{dt} = Z(\vec{z}, u, v). \tag{3}$$

Pro účely pronásledování je třeba formulovat počáteční, okrajové podmínky parametrů.

V této složité oblasti pronásledování jsou uváděny úlohy tzv. vícekrokové hry pronásledování s neúplnou informací, s jedním objektem E a několika subjekty P. Další úloha je týká modelu pronásledování ve hře kvality apod. [5]

3.3 Matematický model pátracího procesu

Pod pátráním rozumíme proces, který je tvořený množinou vzájemně sladěných činnosti, úkonů a opatření, zaměřený k nalezení hledaného objektu pro předem stanovený účel. Objektem pátrání musí být pouze objekt fyzický, konkrétní (známý). Za objekty pátrání považujeme osoby, věci, informace a data v rozsáhlých informačních systémech, Internetu apod.

Pod systémem pátrání rozumíme systém jehož prvky jsou subjekt pátrání, objekt pátrání, které se pohybují v oblasti $S \subset E^2$. Vazby mezi těmito prvky lze postihnout v závislosti na čase, strategii subjektu **P** a objektu **O** pátrání.

Pohyb objektu pátrání závisí na mnoha vlastních faktorech a na akcích subjektu pátrání apod. To lze popsat obecně diferenciální rovnicí tvaru

$$\frac{dy}{dt} = (t, x, y, u, v)$$

kde, x, y $\in E^2$ jsou souřadnice subjektu a objektu pátrání, u, v jsou jejich strategie.

V procesu pátrání mohou nastat následující případy:

1. Subjekt pátrání P má k dispozici výchozí množství informací o objektu pátrání O, přičemž jsou informace neúplné. Nezná např. směr a rychlost pohybu O.
2. P může mít k dispozici jisté rozložení pravděpodobnosti objektu pátrání v pátrací množině S.
3. P zná souřadnice objektu O, ve kterých se nacházel v čase počátku pátrání t_0 čase $t_1 \rangle t_0$.
4. P získává průběžné informace o objektu pátrání O v diskrétních časových okamžicích, kde se nacházel v minulosti.

[5] POŽÁR, J. *Příspěvek k modelování bezpečnostní činnosti (pronásledování a pátrání)*. KDP, Praha:ČVUT, 1982.

Tato teorie je v mnohém rozpracována, avšak chybí jí právě sémantické vyjádření modelu. V pátrání se používají pojmy jako mosty (bridges), bariéry – plné a polopropustné, extremální strategie, senzory apod. Pro zajímavost se uvádí tzv. Koopmanova funkce

$$b(z) = 1 - e^{-z2\delta/S}$$

kde b(z) je pravděpodobnost detekce objektu pátrání za čas, kdy urazil dráhu z, δ je okolí pátrání. Podrobný popis je uvedený v literatuře [2,3,4,].

3.4 Management bezpečnostní činnosti

V managementu bezpečnostní činnosti se nejvíce využívají matematické metody právě v rozhodovacím procesu v dobře strukturovaných problémech (Well stuctured problems). Ty se však v bezpečnostní činnosti vyskytují velmi zřídka. Proto u špatně strukturovaných problémů je právě matematizaci poměrně obtížná, někdy dokonce nemožná. Potíž spočívá právě v proměnných a konstantách, které jsou většinou neidentifikovatelné a nekontrolovatelné. Matematické struktury (omezující podmínky) se mohou využívat následující:

- Analytické struktury. Jedná se o objekty z odvětví matematické analýzy, lineární algebry aj. Příkladem mohou být soustavy rovnic (lineární, nelineární, skalární, vektorové, diferenciální, integrální maticové apod.), soustavy nerovnic, funkce (stochastické, fuzzy atd.), funkcionály aj.
- Topologické struktury. Sem patří modely na základě teorie grafů a sítí, logické systémy popsané pomocí grafů a schémat. Topologické modely lze zpravidla ekvivalentně zobrazovat pomocí tzv. incidenčních matic (tabulek, matic souslednosti apod.).
- Kvalitativní struktury. Model je popsán pomocí kvalitativních rovnic, kvalitativních nerovností nebo „vágně“. Příklad: kvalitativní matice, graf, jazykový operátor „velmi“ v teorii fuzzy množin atd.

Některé speciální a především již standardní struktury matematického modelu mají specifické názvy. Příklady: Cobb-Douglasova funkce. Účelová funkce. Podmínky nezápornosti. Lagreangova funkce. Wolfeho podmínky.

Nejistotou při zobrazení systému pomocí matematického modelu rozumíme situaci, kdy nemáme k disposici všechnu potřebnou informaci nebo kdy některé z informací jsou nespolehlivé.

Modelování při riziku předpokládá, že některé informace jsou náhodné veličiny, nebo že některé procesy jsou popsány náhodnými funkcemi. V případě modelů s rizikem můžeme velikost rizika při přijetí řešení popsat pomocí pravděpodobnostních charakteristik.

Analogicky můžeme považovat modelování za rizika i v případě použití fuzzy veličin, nebo fuzzy funkcí. Velikost rizika lze potom vyjádřit buď pomocí vhodné fuzzy míry nebo tuto fuzzy míru transformovat na subjektivní pravděpodobnost.

Závěr

Matematizace bezpečnostní činnosti vyžaduje důkladnou znalost komplexní bezpečnosti, jejich vzájemné souvislosti, znalosti z různých oborů jako managementu, kriminalistiky, právní problematiky, psychologie chování a jiné. Na druhé straně je nutné ovládat potřebný matematický aparát, jako fuzzy množiny, diferenciální rovnice, teorie bifurkací, variační metody aj.

Domnívám se, že na základě spolupráce s odborníky z teoretické fronty na univerzitách lze dosáhnout dalšího pokroku v modelování bezpečnostní činnosti.

Literatura:

1. ISAACS, R. *Differential Games*. New York: John Wiley, 1965.
2. PORADA, V. - POŽÁR, J. - KONRÁD, Z. *K některým možnostem zkoumání způsobu spáchání a utajení trestného činu*. Čs. kriminalistika, 14, 1981, č.1, s. 50 - 55.
3. PENZEŠ, L. - PORADA, V. - POŽÁR, J. *K některým přístupům v metodice odhalování a vyšetřování trestných činů na základě teorie modelování*. Čs. kriminalistika,15, 1982, č. 3, s. 214 - 225.
4. PORADA, V. - POŽÁR, J. - VAJDA, L. *Vývojové schéma pátracího procesu a tvorby pátracích verzí.* Čs. kriminalistika, 13, 1980, č. 4, s. 358 - 362.
5. POŽÁR, J. *Vztah bezpečnostní situace a policejního managementu.* In Mezinárodní vědecká konference : Současnost managementu v ČR a uplatnění zahraničních poznatků v řízení. Sborník přednášek sekce Management. Ostrava: VŠB, 1995, s.98 - 101.
6. POŽÁR, J. *Bezpečnostní situace.* In: Teoretické a právní aspekty pořádkové činnosti Policie. Praha: PA ČR, 2001, s. 26 - 38.
7. NEČAS, S. *Příspěvek k bezpečnostní politice bankovního domu.* Praha: SVŠES, 2003, s. 157 – 163.

Matematika a ekonomické předměty

Bohuslav Sekerka, Soukromá vysoká škola ekonomických studií Praha

Postavení matematiky ve výuce

Zaměřím se na výuku matematiky, i když jsem si vědom, toho, že by měl být uvažován širší celek, tj. matematika, pravděpodobnost a matematická statistika včetně stochastických procesů. Ve výkladu budou naznačeny určité problémy, aniž by byly podrobněji analyzovány.

V naší republice působí 27 vysokých škol (nepočítáme-li Vysokou vojenskou školu pozemního vojska), na nichž je akreditován obor 6208 Ekonomika a management. Z těchto škol Vysoká škola ekonomická v Praze tento obor vyučuje na dvou fakultách.

Výuka matematiky se v té či oné podobě uskutečňuje na téměř všech vysokých školách ekonomického směru. Proč tomu tak je ? Uveďme některé teze

1) Matematika jako deduktivní věda učí abstraktnímu myšlení. Tuto tezi lze přijmout. Nicméně existují i jiné discipliny, které mohou vychovávat k deduktivnímu myšlení. Jde např. o logiku. Abstraktní myšlení mohou kultivovat například jazyky jako latina, řečtina. Výuka těchto jazyků v tomto smyslu je dosti opomíjena.
2) Matematické vzdělaní kultivuje přístup k řešení problémů v nejrůznějších vědních oblastech a umožňuje proniknutí do jejich podstaty. Téměř každý obor je v současnosti více či méně matematizován, jak ve své teorii. tak v praxi. Ekonomické vědy nejsou výjimkou.
3) Matematika spolu se statistikou je nástrojem kvantifikace ekonomických a nejen ekonomických jevů a procesů.

Rozsah matematiky, který by měl být vyučován, vyplývá z rozsahu, který se v té či oné disciplině využívá nebo může využívat. Nositel akademického titulu, by měl být schopen rozumět odborné literatuře svého oboru. Na magisterském stupni, pak nejen rozumět, ale i rozvíjet stupeň poznání daného oboru. Z této teze plyne, že nutno výuku matematiky diferencovat podle stupně vzdělávání. Na většině škol se matematika přednáší v prvních rocích studia. Na specializovanou matematiku zaměřenou na potřeby daného oboru se ve vyšších ročnících zapomíná.

Náplň a hloubka výkladu není na všech školách stejná. Také metodika výkladu se na různých školách liší, zejména v závislosti na formě studia a na vyspělostí posluchačů, na jejich přístupů ke studiu a na zvládnutí středoškolského učiva.

Předpokládá se, že v budoucnosti budou studenti studovat více vysokých škol a že mezi vysokými školami existovat přestupy ve větší míře než nyní. V našich podmínkách jsou přestupy minimální. Jiná situace vzniká, v případě, že bakalář hodlá pokračovat v magisterském studiu na jiné škole např. z důvodu, že jeho mateřská škola nemá pro magisterské studium akreditaci. Při přestupu nemusí být matematika ani zkoušena.

Tak vzniká otázka unifikace či diverzifikace ve výuce matematiky a podobných předmětů na různých školách. Proti unifikaci mluví specifika škol a jejich zaměření. Pro unifikaci mluví zabezpečení stejné úrovně znalostí matematiky na magisterském studiu. Je zřejmé, že úplné unifikace se nedá docílit a navíc není zřejmá její účelnost. Zdá se však vhodné definovat určité jádro matematiky, které je předpokladem pro magisterské studium a které umožní plnit očekávanou úlohu bakalářů v praxi. Každá škola by podle svých specifik k svoji náplň výuky upravovala tak, aby v tématech bylo zahrnuto dohodnuté jádro.

Výuka na vybraných vysokých školách

Uveďme, jak je vyučována matematika na vybraných vysokých školách. Do výběru bude zahrnuta Vysoká škola ekonomická v Praze, Vysoká škola ekonomie a managementu a Soukromá vysoká škola ekonomických studií.

1. Vysoká škola ekonomická

Tato škola nabízí přednášky

1	MAT 101	Matematika A - Matematické struktury
2	MAT 102	Matematika B - Matematická analýza
3	MAT 104	Algoritmy a logika
4	MAT 105	Calkulus A
5	MAT 106	Calkulus B
6	MAT 203	Numerická matematika
7	MAT 205	Maticový počet
8	MAT 206	Matematická analýza II
9	MAT 207	Matematické metody
10	MAT 208	Kapitoly z historie matematiky I
11	MAT 209	Kapitoly z historie matematiky II
12	MAT 401	Lineární metody algebry a analýzy

Pro potřeby našeho srovnání postačí uvažovat kurzy MAT101 Matematické struktury a MAT102 Matematická analýza. Tyto dva kurzy tvoří ucelený výklad základů tzv. vyšší matematiky. Obsahy těchto předmětů se neliší od podobných kursů přednášených na zahraničních ekonomických školách. Absolventi školy studu,jící na zahraničních vysokých školách vesměs potvrzují důležitost matematiky a pro své potřeby by požadovali rozsah daleko větší.

Osnova MAT101

Množinově logický jazyk matematiky
Vektorové prostory.
Lineární zobrazení, algebra matic. soustavy lineárních rovnic
Euklidovské prostory, konvexní množiny.
Analýza - limita posloupnosti, spojitost funkce jedné proměnné, limita funkce jedné proměnné
Diferenciální počet reálných funkcí jedné proměnné

Osnova MAT 102

Integrál funkcí jedné proměnné, metody určování primitivní funkce, určité integrály, nevlastní integrály
Nekonečné řady, kritéria konvergence, absolutní konvergence, vlastnosti mocninných řad.
Diferenciální počet funkcí více proměnných konvergence a topologie v euklidovských prostorech, zobecnění pojmu derivace, implicitně definované funkce, extremální úlohy.
Obyčejné diferenciální rovnice, rovnice 1. řádu - separace proměnných, variace konstant, vlastnosti lineárních diferenciálních rovnic n-tého řádu
Diferenční počet, ekonomické aspekty diferenční rovnice (diskrétní modelování).

2. Vysoká škola ekonomie a managementu

Předmět matematika se soustřeďuje na praktické zvládnutí vybraných základních matematických dovedností a způsobů matematického myšlení, které společně se základy statistiky tvoří východisko aplikace kvantitativních metod v navazujících oborových, odborně zaměřených předmětech. Těžiště předmětu spočívá v optimalizačních úlohách s návazností na ekonomickou analýzu.

Obsah předmětu:

Přehled základních pojmů: Exponenty, mnohočleny, rozklad na činitele, lineární a kvadratické rovnice, doplnění na čtverec a soustavy rovnic, funkce, grafy, sklony a průsečíky, včetně nelineárních funkcí.
Derivace a_pravidla diferenciace: Limity, spojitosti, sklony nelineárních funkcí, pojmy diferencovatelnosti a spojitosti, pravidla derivování, derivace vyššího řádu, derivace implicitních funkcí. Konvexnost a konkávnost, zjišťování lokálních extrémů, inflexních bodů, zobrazení křivek, optimalizace funkcí.
Diferenciální počet: Funkce několika proměnných a parciální derivace, včetně parciálních derivací vyššího řádu, optimalizace funkcí s více proměnnými, vázaná optimalizace s Lagrangeovými multiplikátory, totální a parciální diferenciál, totální derivace, pravidla implicitní a inverzní funkce.
Exponenciální a logaritmické funkce: Přirozené exponenciální a logaritmické funkce a řešení přirozených exponenciálních a logaritmických rovnic, logaritmická transformace nelineárních funkcí. Matematické principy jednoduchého a složeného úročení, diskontování a výpočtu současné hodnoty peněz.
Matematika v ekonomii: Řešení optimalizačních problémů mikroekonomické analýzy (maximalizace užitku a zisku, minimalizace nákladů), včetně případů optimalizace s omezením, a kvantifikace důchodově výdajového modelu, včetně důsledků změn jeho proměnných.

3. Soukromá vysoká škola ekonomických studií

Obsah předmětu matematika

Množiny a množinové operace, číselné množiny, zobrazení

Posloupnosti a řady: limita základní vlastnosti, kriteria konvergence, vybrané typy posloupností a řad, diferenční počet a základní diferenční rovnice.

Základy lineární algebry: matice a jejich vlastnosti, maticové operace, soustavy lineárních rovnic a jejich řešení.

Funkce reálné proměnní: limita, spojitost a další vlastnosti, derivace a jejich využití ke sledování funkcí, Taylorův rozvoj, integrály a jejich využití, základní diferenciální rovnice, funkce více proměnných.

Matematizace reálných situací, teorie algoritmů, modely reálných situací, ekonomicko matematické modelování.

Z uvedeného přehledu plyne různorodost přístupu k výuce matematiky na vysokých školách ekonomického zaměření.

Ekonomické oblasti a matematika

Jednou z možností jak specifikovat rozsah výuky matematiky, je uvažovat ekonomické oblasti, v nichž se jevy a procesy modelují pomocí matematických a statistických nástrojů ve vztahu k oblastem matematiky a to i aplikovaným. Bylo by též zajímavé analyzovat vliv ekonomických disciplin a ekonomické praxe na vlastní rozvoj matematiky.

Ve všech ekonomických disciplinách se uplatňují pojmy algoritmus, model, informace, systém. Tyto pojmy zpravidla nejsou analyzovány z hlediska jejich obsahu a formalizovaného popisu. Tohoto úkolu by se měla ujmout výuka matematiky.

Vraťme se k ekonomickým disciplinám ve vztahu a užití matematiky. Při tom budu v některých případech mlčky předpokládat, užívání poznatků teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky. Na straně ekonomických věd, budu uvažovat makroekonomii, mikroekonomie, podnikovou ekonomie a úlohy týkající se specifických forem ekonomického pohybu jako např. růst, obnova a teorie front.

Tento přehled si nedělá nároků na úplnost jak na straně ekonomických věd tak na straně matematických a statistických disciplin. Vyplývá z osobních zkušeností a prací v uvažovaných oblastech.

1. Mikroekonomie

Teorie poptávky komodit a výrobních faktorů a teorie firmy

Funkce jedné a více proměnných, limity, spojitost, vlastnosti těchto funkcí, derivace a integrály, parciální derivace, totální diferenciál, derivování složených funkcí, Taylorova věta pro funkce více proměnných, Eulerova věta o homogenních funkcích, věta o implicitních funkcích, chování funkcí, extrémy funkcí více proměnných, kvadratické formy, vázané extrémy.

Nelineární programování, Kuhn-Tuckerův algoritmus (krajní body řešení)

Maticový a vektorový počet, determinanty, řešení lineárních rovnic, kvadratické formy.

Firma v tržním prostředí

Lineární programování, simplexový algoritmus, princip duality, parametrické a celočíselné programování
Nelineární programování, Kuhn-Tuckerův algoritmus
Alokační úlohy
Principy rozhodování při riziku a neurčitosti
Teorie her více hráčů

2. Makroekonomie, modely národního hospodářství

Růstové agregátní modely

Funkce jedné a více proměnných, multiplikace (řady), operátory časového posunu, lineární diferenční rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty
Diferenciální operátor, lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty, diferenciální rovnice Bernoulliova typu, řešení lineární diferenciální rovnice tvaru yt´ + at yt = bt

Modely řízených procesů

Pontrjaginův princip maxima (dvousektorový model národního hospodářství)
Bellmanův princip optimality.

Strukturní modely na národohospodářské úrovni

Maticový a vektorový počet, determinanty, řešení lineárních rovnic, vlastní čísla a vektory.
Lineární a nelineární programování, teorie her dvou hráčů s nulovým součtem (řešení modelu von Neumanna)

3. Plánovací a firemní aplikace

Analýza, plánování, ceny

Lineární programování, simplexový algoritmus, princip duality, parametrické a celočíselné programování
Nelineární programování, Kuhn-Tuckerův algoritmus
Metody síťové analýzy
Dynamické programování a Bellmanův princip optima
Principy rozhodování
Teorie her dvou a více hráčů
Simulace

Strukturní modely na podnikové úrovni

Maticový a vektorový počet, determinanty, řešení lineárních rovnic
Lineární a nelineární programování

Růst, obnova, hromadná obsluha (teorie front)

Růst: Diferenciální rovnice, parciální diferenciální rovnice (popis stochastického exponenciálního růstu)
Obnova, teorie zrodu a zániku: Lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty, Laplaceova transformace a její užití při řešení diferenciálních, integrálních a parciálních diferenciálních rovnic, kompoziční integrální rovnice

Hromadná obsluha (např. teorie zásob): Metoda vytvořující funkce, homogenní parciální diferenciální rovnice prvního řádu, konvoluce - integrální rovnice, simulace

Domnívám se, že při specifikaci náplně výuky matematiky by se mělo vycházet z potřeb ekonomických disciplin jak teoretických tak praktických. To znamená, že by se formování této náplně měli účastnit též ekonomové.

Ekonomická matematika

Za netradiční přístup považuji zavést na ekonomických školách předmět ekonomická matematika (matematická ekonomie). V rámci jednotlivých témat tohoto předmětu by byly též přednášeny potřebné matematické poznatky. Předmět ekonomická matematika by byl buď jako doplňkový předmět ke klasické výuce matematiky nebo jako předmět v jehož rámci by posluchači byly postupně seznamováni s příslušnými partiemi matematiky při výkladu ekonomických objektů a jevů, aniž by byly přednášeny klasické partie matematiky samostatně. První přístup by odpovídal školám, s velkým počtem posluchačů, kteří jsou ve vyšších ročnících diferencováni. Druhý přístup ba odpovídal školám s malým počtem posluchačů, jejichž výuka není příliš diferencována.

Uvedu návrh hlavních témat náplně předmětu ekonomická matematika. Tento návrh by byl v závislosti na zaměření a specializaci modifikován s ohledem na potřeby příslušného oboru.

Návrh vychází ze zkušeností získaných při výuce na Matematicko fyzikální fakultě UK v období 70. a 80. let min. století a ze současných přednášek na Univerzitě Pardubice.

Náplň předmětu ekonomická matematika

Agregátní modely
Základní veličiny a vztahy
Statický Keynesův model
Výchozí veličiny, rovnovážná úroková míra, křivka LM, vztah investic a úroku, křivka IS, model IS-LM
Dynamická analýza agregátních modelů národního hospodářství Multiplikátor zahrnující zpoždění, akcelerátor, Harrod-Domarův růstový model, Samuelson-Hicksův model, Goodwinovy modely, Philipsovy modely ekonomické stabilizace
Walrasův model všeobecné rovnováhy
Formulace modelu, vztahy, řešitelnost
Strukturní modely
Model meziodvětvových vztahů, strukturní model von Neumannův

Poptávka a nabídka

Funkce nabídky a poptávky, pružnosti, konvergence k bodu rovnováhy, preferenční uspořádání a preferenční funkce, axiomy preferenčního uspořádání, vlastnosti preferenční funkce, kardinální a ordinální pojetí

Teorie poptávky

Klasický model poptávky

Formulace modelu, axiomy chování spotřebitele, podmínky rovnováhy, poptávkové funkce a nepřímá užitková funkce, Engelovy a Cournotovy křivky, elasticity , Sluckého vztahy

Časové zpoždění v ekonomických modelech

Operátor časového posunu a základní vztahy, diferenční a diferenciální rovnice popisující zpoždění, Bernoulliova diferenciální rovnice

Poptávka po předmětech dlouhodobé spotřeby

Krátkodobá analýza, vztahy mezi renovační a čistou poptávkou a úrovní vybavenosti, zpoždění mezi požadovanou a skutečnou vybaveností, parametry popisující vyřazování a vztah mezi nimi

Dlouhodobá analýza, základní diferenciální rovnice a její řešení, logistická křivka, nekonstantní hladina nasycenosti

Teorie firmy

Produkční funkce

Definice, vlastnosti, vztahy plynoucí ze substituce faktorů, Cobb-Douglasova produkční funkce, produkční funkce typu C.E.S, krátkodobá a dlouhodobá analýza

Náklady a výnosy firmy

Nákladová funkce celkové náklady, průměrné náklady, mezní náklady, výnosová funkce celkové výnosy, průměrné výnosy, mezní výnosy, optimalizační propočty

Firma v tržním prostředí

Firma v prostředí dokonalé konkurence, kritéria rozhodování firmy, krátkodobé a dlouhodobé hledisko

Firma v nedokonalé konkurenci:

Monopol, kritéria rozhodování firmy, krátkodobé a dlouhodobé hledisko

Monopolistická konkurence, kritéria rozhodování firmy, krátkodobé a dlouhodobé hledisko, oligopolu, charakteristika oligopolu, modely oligopolu, teorie her

Na ekonomickou matematiku (matematickou ekonomii) by pak mohly analogicky navázat metody operační analýzy.

Závěr

V příspěvku jsem naznačil, že by bylo vhodné specifikovat jádro matematiky, které by obsahovaly přednášky na všech ekonomických fakultách vysokých škol. Při nalézání tohoto jádra musí být velmi úzká spolupráce s vyučujícími ekonomických předmětů. Standardní náplň by tak vznikla ve vzájemném dialogu matematiků a ekonomů. Při tom by měly být též vzaty v úvahu rozsahy kursů, které jsou přednášeny na zahraničních ekonomických školách.

Rozpracování naznačené problematiky lze zastřešit Asociací děkanů ekonomických fakult, neboť v asociaci je problematika sjednocování výuky předmětem zvýšené pozornosti. Dávám proto v úvahu vytvoření matematické sekce při této asociaci.

Výpočet rezerv pro časově rozložené pojistné plnění v neživotním pojištění

Bohuslav Sekerka, Soukromá vysoká škola ekonomických studií Praha

V neživotním pojištění se uvažuje rezerva na nezasloužení pojistné, rezerva na pojistná plnění, rezerva pojistného neživotních pojištění, vyrovnávací rezerva a případně další.[6]

Popišme ve stručnosti význam některých z uvedených rezerv. Rezerva pojistného neživotních pojištění vyplývá ze skutečnosti, že pojistné po celou dobu pojištění zůstává zpravidla stejné. Očekávané výše pojistných plnění mohou u některých produktů (tarifů) růst s dobou trvání pojištění např. s věkem pojištěného. Proto se vytváří rezerva pojistného neživotního pojištění. Závisí-li výše této rezervy na věku pojištěného, nazýváme ji rezerva na stáří.

Vyrovnávací rezerva je určena na vyrovnávání zvýšených nákladů na pojistná plnění, která vznikají z titulu výkyvů ve škodovém poměru, které jsou způsobeny skutečnostmi nezávislými na pojišťovně. Výše této rezervy se zpravidla určuje procentem (promilí) z čistého zaslouženého pojistného.

Předmětem článku rezerva na pojistná plnění.

Rezerva na pojistná plnění

Libovolná pojistná událost i prochází od určitými etapami, které jsou vymezeny časovými okamžiky

t_{i0} vznik pojistné události
t_{i1} ohlášení pojistné události
t_{i2} plné uhrazení pojistného plnění.

Pojistná událost i, která se nachází v intervalu

(t_{i0} , t_{i1}> je neohlášená pojistná událost (IBRN incurred but not reported), které odpovídá rezerva na pojistná plnění z neohlášených pojistných událostí. Tato rezerva se vypočítává matematicko-statistickými metodami (např. Chain-Ladder) na základě statistických dat z událostí obdobného druhu, která vypovídají o velikosti platby a o době mezi vznikem a hlášením pojistné události, nebo se určuje kvalifikovaným odhadem.

(t_{i1} , t_{i2}> je ohlášená pojistná událost, ale dosud nevypořádaná pojistná událost.
Někdy se rozlišuje

a) nevyřízená pojistná událost, které odpovídá rezerva na pojistná plnění z nevyřízených pojistných událostí. Tato rezerva se označuje RBNS (Reportet but not settled). U této rezervy není známa výše plateb. Rezerva se vypočítává matematicko-statistickými metodami (např. Chain-Ladder) na základě statistických dat o pojistné události, která vypovídají o velikosti a časovém rozložení dílčích plateb nebo se určuje kvalifikovaným odhadem.

b) vyřízená, ale neuhrazená pojistná událost, které odpovídá rezerva na pojistná plnění vyřízených, ale neuhrazených pojistných událostí. Jde o pojistné

[6] Příspěvek vznikl z mých poznámek připravených pro vedení práce v rámci studentské výzkumné činnosti a vychází z publikace Sekerka B.: Matematické a statistické metody ve financování, cenných papírech a pojič¨štění, Professs Consulting, Praha 2002 a literatury uvedené v citované knize.

události, u nichž jsou již definitivně stanoveny platby pojistného plnění, ale platby jsou z nejrůznějších důvodů odloženy na další pojistná období. U této rezervy je tedy známa výše plateb. Rezerva se určí součtem příslušných plateb.

$(t_{i3}$, $\infty>$ je ohlášená pojistná událost, u které je plnění zcela uhrazeno (pojistná událost vyřízená).
Rezervy se v tomto případě neurčuje.

Časové rozložení rezervy

U některých pojistných plnění, jsou platby časově rozloženy Proto je nutní odhadnout budoucí platby a vytvořit pro ně potřebnou rezervu. Tato skutečnost vyplývá z toho, že zjištění konečné výše škody může trvat i několik let a na počátku likvidace není přesně známa. Vystupují zde přitom především následující typy pojistných rezerv:

- rezerva pro vzniklé, ale doposud nehlášené pojistné událostí (tzv. IBNR rezerva = Incurred But Not Reported);
- rezerva pro hlášené, ale doposud nevyřízené pojistné události (tzv. RBNS rezerva = Reported But Not Settled);
- rezerva pro vyřízené, ale doposud neproplacené pojistné události (někdy jsou již definitivně stanovené platby pojistného plnění z nejrůznějších důvodů odloženy až na další pojistná období).

Výchozí data

Předpokládejme, že v období t+s došlo k pojistné události a v tomto období bylo vyplaceno pojistné plnění $x_{s,0}$, V následujícím období s+1 bylo vyplaceno $x_{s,1}$, atd., až poslední částka byla vyplacena v období s+T ve výši $x_{s,T}$, kde T je maximální počet období, ve kterých je vypláceno pojistné plnění. Tak časové rozložení vyplácených částek v obdobích vzniku pojistné události a následujících obdobích po vzniku je popsáno hodnotami

$$x_{s,0}\ ,\ x_{s,1}\ ,\ x_{s,2}\ ,\ \ldots,\ x_{s,T}\ ,$$

kde s = 0, 1, 2, …, T.

Platba hodnoty $x_{s,i}$ se uskuteční v období t+s+i. Protože období je určité délky vyjadřujeme hodnotu plateb v dohodnutém okamžiku v rámci období. Zpravidla je tímto okamžikem střede období.

Hodnoty je též nutné převézt na hodnotu k datu, ke kterému se počítá velikost rezerv.

Posloupnost plateb můžeme v jednotlivých obdobích znázornit schématem

Období	t	t+1	t+2		t+T-1	t+T	t+T+1	t+T+2	t+T+3
t	$x_{0,0}$	$x_{0,1}$	$x_{0,2}$	…	$x_{0,T-1}$	$x_{0,T}$			
t+1		$x_{1,0}$	$x_{1,1}$	…	$x_{1,T-2}$,	$x_{1,T-1}$	$x_{1,T}$		
t+2			$x_{2,0}$	…	$x_{2,T-3}$	$x_{2,T-2}$	$x_{2,T-1}$	$x_{2,T}$	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
t+T-1					$x_{T-1,0}$	$x_{T-1,1}$,	$x_{T-1,2}$	$x_{T-1,3}$	$x_{T-1,4}$
t+T						$x_{T,0}$	$x_{T,1}$	$x_{T,2}$	$x_{T,3}$

Na konci období t+T jsou známa data uvedená sloupcích t, t+1, t+2, …, t+T-1, t+T.

Protože v této tabulce jsou ve sloupcích uvedené hodnoty, které odpovídají obdobím, ve kterých se uskutečňují platby, je tato tabulka vhodná např. k úpravě hodnot přihlížejících k inflaci.

Uvedené hodnoty upravíme do trojúhelníkového schématu, v němž jsou celková doposud vyplacená pojistná plnění uspořádána do tabulky podle roku vzniku příslušné pojistné události a zároveň podle počtu let, která od vzniku pojistné události uplynula. Tak získáme následující tabulku:

Období	0	1	2	…	T-2	T-1	T
t	$x_{0,0}$	$x_{0,1}$	$x_{0,2}$	…	$x_{0,T-2}$	$x_{0,T-1}$	$x_{0,T}$
t+1	$x_{1,0}$	$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	…	$x_{1,T-2}$	$x_{1,T-1}$	
t+2	$x_{2,0}$	$x_{2,1}$	$x_{2,2}$	…	$x_{2,T-2}$		
…	…	…	…	…	…	…	…
t+T-1	$x_{T-1,0}$	$x_{T-1,1}$		…			
t+T	$x_{T,0}$			…			

Hodnoty ve sloupcích 0, 1, 2, …, T uvedené tabulky odpovídají částkám, které jsou vypláceny v obdobích v obdobích od vzniku pojistné události, tj . vznikla-li pojistná událost v období t+s , potom částka $x_{s,j}$, kde i splňuje $0 \leq j \leq T-s$ značí částku vyplacenou v období t+s+j.
Z tabulky dále vidíme, že v období t+T se vyplatí částka

$$x_{T,0} , x_{T-1,1} , x_{T-2,2} , \ldots, x_{0,T} .$$

Ze získané tabulky vytvoříme kumulovanou tabulku (kumulované trojúhelníkové schéma)

Období	0	1	2	…	T-2	T-1	T
t	$y_{0,0}$	$y_{0,1}$	$y_{0,2}$	…	$y_{0,T-2}$	$y_{0,T-1}$	$y_{0,T}$
t+1	$y_{1,0}$	$y_{1,1}$	$y_{1,2}$	…	$y_{1,T-2}$	$y_{1,T-1}$	
t+2	$y_{2,0}$	$y_{2,1}$	$y_{2,2}$	…	$y_{2,T-2}$		
…	…	…		…	…	…	…
t+T-1	$y_{T-1,0}$	$y_{T-1,1}$		…			
t+T	$y_{T,0}$			…			

kde pokládáme

$$y_{i,0} = x_{i,0} \quad \text{pro } i=0, 1, \ldots, T$$

$$\begin{array}{ll}
y_{0,1} = y_{0,0} + x_{0,1} & y_{0,2} = y_{0,1} + x_{0,2} \\
y_{1,1} = y_{1,0} + x_{1,1} & y_{1,2} = y_{1,1} + x_{1,2} \\
y_{2,1} = y_{2,0} + x_{2,1} & y_{2,2} = y_{2,1} + x_{2,2} \\
\ldots & \ldots \\
y_{T-21} = y_{T-2,0} + x_{T-2,1} & y_{T-2,2} = y_{T-2,1} + x_{T-1,2} \\
y_{T-1,1} = y_{T-1,0} + x_{T-1,1} &
\end{array}$$

atd.

V následujícím výkladu popíšeme vybrané metody užívané pro odhad budoucích pojistných rezerv na základě známých údajů.

Klasická metoda Chain-Ladder

Uvedeme nejjednodušší variantu jedné z nejpoužívanějším metod, která se nazývá Chain-Ladder (stupňová metoda)
Z tabulky kumulovaných hodnot vytvoříme „indexy“

Období	1/0	2/1	3/2	…	(T-1)/(T-2)	T/(T-1)
t	$a_{0,1}$	$a_{0,2}$	$a_{0,3}$	…	$a_{0,T-1}$	$a_{0,T}$
t+1	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	…	$a_{1,T-1}$	
t+2	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	…		
…	…	…	…	…	…	…
t+T-2	$a_{T-2,1}$	$a_{T-2,2}$		…		
t+T-1	$a_{T-1,1}$			…		

Pro jednotlivé sloupce získáme průměry, které se využijí při dopočítávání předpokládaných hodnot v budoucnosti vyplácených.

Období	1/0	2/1	3/2	(T-1)/(T-2)	T/(T-1)
Průměr	$a_{1/0}$	$a_{2/1}$	$a_{3/2}$	$a_{(T-1)/(T-2)}$	$a_{T/(T-1)}$

Získané průměry použijeme pro odhad údajů pod hlavní diagonálou tabulky

Období	0	1	2	…	T-2	T-1	T
t	$y_{0,0}$	$y_{0,1}$	$y_{0,2}$	…	$y_{0,T-2}$	$y_{0,T-1}$	$y_{0,T}$
t+1	$y_{1,0}$	$y_{1,1}$	$y_{1,2}$	…	$y_{1,T-2}$	$y_{1,T-1}$	
t+2	$y_{2,0}$	$y_{2,1}$	$y_{2,2}$	…	$y_{2,T-2}$		
…	…	…	…	…	…	…	…
t+T-1	$y_{T-1,0}$	$y_{T-1,1}$		…			
t+T	$y_{T,0}$			…			

$$y_{1,T} = a_{T/(T-1)}\, y_{1,(T-1)}$$

$$y_{2,T-1} = a_{(T-1)/(T-2)}\, y_{2,(T-2)}$$
$$y_{2,T} = a_{T/(T-1)}\, y_{2,(T-1)}$$

$$y_{3,T-2} = a_{(T-2)/(T-3)}\; y_{2,(T-3)}$$
$$y_{3,T-1} = a_{(T-1)/(T-2)}\; y_{3,(T-2)}$$
$$y_{3,T} = a_{T/(T-1)}\; y_{3,(T-1)}$$

atd.

S využitím rekonstruovaných hodnot lze vyčíslit odhad dosud nezaplaceného pojistného plnění, které vyjadřuje výši netto rezerv, které je nutno vytvořit. Rekonstruujeme-li hodnoty v posledním sloupci, dostaneme

$$y_{1,T} = a_{T/(T-1)}\, y_{1,(T-1)} = k_{T-1}\, y_{1,(T-1)}$$
$$y_{2,T} = a_{T/(T-1)}\, a_{(T-1)/(T-2)}\, y_{2,(T-2)} = k_{T-2}\, y_{2,(T-2)}$$
$$y_{3,T} = a_{T/(T-1)}\, a_{(T-1)/(T-2)}\, a_{(T-2)/(T-3)}\, y_{3,(T-3)} = k_{T-3}\, y_{3,(T-3)}$$
$$\ldots$$
$$y_{T,T} = a_{T/(T-1)}\, a_{(T-1)/(T-2)} \ldots a_{1/0}\, y_{T,0} = k_0\, y_{T,0}\,,$$

kde koeficienty k_s , s=0,1,2,…,T-1 jsou definovány pomocí vztahů

$k_{T-1} = a_{T/(T-1)}$
$k_{T-2} = a_{(T-1)/(T-2)}\, k_{T-1} = a_{(T-1)/(T-2)}\, a_{T/(T-1)}$
$k_{T-3} = a_{(T-2)/(T-3)}\, k_{T-2} = a_{(T-2)/(T-3)}\, a_{(T-1)/(T-2)}\, a_{T/(T-1)}$

$k_1 = a_{2/1}\, k_2 = a_{T/(T-1)}\, a_{(T-1)/(T-2)} \dots a_{2/1}$
$k_0 = a_{1/0}\, k_1 = a_{T/(T-1)}\, a_{(T-1)/(T-2)} \dots a_{1/0}$.

Po odečtení diagonálních hodnot od posledního sloupce doplněného trojúhelníkového schématu a po sečtení těchto rozdílů se získá hledaný odhad rezervy. Označíme-li r_s rezervu pro pojistné události, které vznikly v období s, vidíme, že platí

$r_0 = 0$
$r_1 = (1-k_{T-1})\, y_{1,(T-1)}$
$r_2 = (1-k_{T-2})\, y_{2,(T-2)}$
$r_3 = (1-k_{T-3})\, y_{3,(T-3)}$
…
$r_T = (1-k_0)\, y_{T,0}$.

Celkovou rezervu získáme součtem hodnot r_s .

Modifikace této metody zohledňují předpokládaný vývoj inflace (zpravidla je-li uvažovaným jednotkovým obdobím rok) a další aspekty např. přidání sloupce T+1, který obsahuje odhadnuté budoucí platby.

Metoda získání časových koeficientů

Vyjdeme z tabulky kumulovaných dat

Období	0	1	2	…	T-2	T-1	T
t	$y_{0,0}$	$y_{0,1}$	$y_{0,2}$	…	$y_{0,T-2}$	$y_{0,T-1}$	$y_{0,T}$
t+1	$y_{1,0}$	$y_{1,1}$	$y_{1,2}$	…	$y_{1,T-2}$	$y_{1,T-1}$	
t+2	$y_{2,0}$	$y_{2,1}$	$y_{2,2}$	…	$y_{2,T-2}$		
…	…	…	…	…	…	…	…
t+T-1	$y_{T-1,0}$	$y_{T-1,1}$		…			
t+T	$y_{T,0}$			…			

Budeme předpokládat, že hodnoty $y_{i,j}$ pro j=0,1,…,T-1, i=0,1,…,T-j-1 splňují vztahy

$$y_{i,j+1} = c_j\, y_{i,j} ,$$

kde c_j j=0,1,…,T-1 jsou neznámé parametry. Naším úkolem je odhadnout hodnoty neznámých parametrů. K tomu použijeme metody nejmenších čtverců.

Budeme uvažovat výraz

$$F = \sum_{j=0}^{T-1} \sum_{i=0}^{T-j-1} (y_{i,j+1} - c_j\, y_{i,j})^2 .$$

Uvažujme libovolný přípustný sčítanec $s_{i,j} = (y_{i,j+1} - c_j\, y_{j,j})^2$. Pro parciální derivace platí

$$[\partial s_{i,j}/\partial c_j] = -2\,(y_{i,j+1} - c_j\, y_{i,j})\, y_{i,j} .$$

Výpočtem zjistíme

$$\frac{\partial F}{\partial c_j} = -2 \sum_{i=0}^{T-j-1} (y_{i,j+1} - c_j\, y_{i,j})\, y_{i,j} .$$

Položíme vypočtené derivace rovny nule. Dostaneme

$$\sum_{i=0}^{T-j-1} (y_{i,j+1} - c_j\ y_{i,j})\ y_{i,j} = 0\ .$$

Odtud dostaneme

$$c_j = \frac{\sum_{i=0}^{T-j-1} y_{i,j+1}\ y_{i,j}}{\sum_{i=0}^{T-j-1} y_{i,j}^{\ 2}}\ .$$

Po získání hodnot c_j $j=0,1,\ldots,T-1$ postupujeme analogicky jako u metody Chain-Ladder. Dopočítáme nejprve hodnoty $y_{i,j}$ $i=1,2,\ldots,T$ $j=T-i+1, \ldots,T$ a poté určíme hledanou rezervu součtem hodnot $(y_{i,T} - y_{i,T-i})$ pro $i=1,2,\ldots,T$.

Metoda rozložení plateb podle první platby

Vyjdeme z tabulky nekumulovaných dat

Období	0	1	2	…	T-2	T-1	T
t	$x_{0,0}$	$x_{0,1}$	$x_{0,2}$	…	$x_{0,T-2}$	$x_{0,T-1}$	$x_{0,T}$
t+1	$x_{1,0}$	$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	…	$x_{1,T-2}$	$x_{1,T-1}$	
t+2	$x_{2,0}$	$x_{2,1}$	$x_{2,2}$	…	$x_{2,T-2}$		
…	…	…	…	…	…	…	…
t+T-1	$x_{T-1,0}$	$x_{T-1,1}$		…			
t+T	$x_{T,0}$			…			

Budeme předpokládat, že hodnoty $x_{i,j}$ pro $j=1,\ldots,T$, $i=0,1,\ldots,T-j-1$ splňují vztahy

$$x_{i,j} = d_j\ x_{i,0}\ ,$$

kde d_j $j=1,\ldots,T$ jsou neznámé parametry. Naším úkolem je odhadnout hodnoty neznámých parametrů. K tomu použijeme metody nejmenších čtverců.

Budeme uvažovat výraz

$$F = \sum_{j=1}^{T} \sum_{i=0}^{T-j} (x_{i,j} - d_j\ x_{i,0})^2\ .$$

Uvažujme libovolný přípustný sčítanec $s_{i,j} = (x_{i,j} - d_j\ x_{j,0})^2$. Pro parciální derivace platí

$$[\partial s_{i,j}/\partial d_j] = -2\ (x_{i,j} - d_j\ x_{i,0})\ x_{i,0}\ .$$

Výpočtem zjistíme

$$\frac{\partial F}{\partial d_j} = -2 \sum_{i=0}^{T-j} (x_{i,j} - d_j\ x_{i,0})\ x_{i,0}\ .$$

Položíme vypočtené derivace rovny nule. Dostaneme

$$\sum_{i=0}^{T-j} (x_{i,j} - d_j\ x_{i,0})\ x_{i,0} = 0\ .$$

Odtud dostaneme

$$d_j = \frac{\sum_{i=0}^{T-j} x_{i,j}\ x_{i,0}}{\sum_{i=0}^{T-j} {x_{i,0}}^2}\ .$$

Po získání hodnot d_j $j=1,\dots,T$ dopočítáme hodnoty $x_{i,j}$ $i=1,2,\dots,T$, $j=T-i+1, \dots,T$ a poté určíme hledanou rezervu součtem dopočítaných hodnot .

Metoda rozkladu

Vyjdeme z dat, která jsou uvedena v následující tabulce

Období	0	1	2	…	T-2	T-1	T
t	$x_{0,0}$	$x_{0,1}$	$x_{0,2}$	…	$x_{0,T-2}$	$x_{0,T-1}$	$x_{0,T}$
t+1	$x_{1,0}$	$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	…	$x_{1,T-2}$	$x_{1,T-1}$	
t+2	$x_{2,0}$	$x_{2,1}$	$x_{2,2}$	…	$x_{2,T-2}$		
…	…	…	…	…	…	…	…
t+T-1	$x_{T-1,0}$	$x_{T-1,1}$		…			
t+T	$x_{T,0}$			…			

Hodnoty ve sloupcích 0, 1, 2, …, T uvedené tabulky odpovídají částkám, které jsou vypláceny v obdobích v obdobích od vzniku pojistné události, tj . vznikla-li pojistná událost v období t+s , potom částka $x_{s,j}$, kde i splňuje $0\le j \le T-s$ značí částku vyplacenou v období t+s+j.

Budeme předpokládat, že existují hodnoty a_j $j= 0,1, \dots, T$, y_i $i=0,1, \dots,T$ takové, že teoretické hodnoty $x_{i,j} = y_i\ \ a_j$. Tento předpoklad nedává záruku jednoznačnosti hodnot y_i a_j , neboť teoretické hodnoty $x_{i,j}$ by mohly být vyjádřeny též vztahem

$$x_{i,j} = (k\ y_i\ )\ (a_j/k)\ ,$$

kde k je libovolná konstanta. Z tohoto důvodu se přidává dodatečný požadavek, aby hodnoty a_j $j= 0,1, \dots,T$ byly nezáporné a jejich součet byl roven jedné.

Našim úkolem je odhadnout hodnoty a_j , y_i . K tomu použijeme metody nejmenších čtverců. Po jejím vyřešení získané hodnoty upravíme tak, aby platily uvedené podmínky pro hodnoty a_j $j= 0,1, \dots,T$.

Budeme uvažovat výraz

$$F = \sum_{i=0}^{T} \sum_{j=0}^{T-i} (x_{i,j} - y_i\ a_j)^2 = \sum_{j=0}^{T} \sum_{i=0}^{T-j} (x_{i,j} - y_i\ a_j)^2\ .$$

Uvažujme libovolný přípustný sčítanec $s_{i,j} = (x_{i,j} - y_i\ a_j\ )^2$. Pro parciální derivace platí

$$[\partial s_{i,j}/\partial y_i] = -2\ (x_{i,j} - y_i\ a_j\ )\ a_j$$

$$[\partial s_{i,j}/\partial a_j] = -2\ (x_{i,j} - y_i\ a_j\ )\ y_i\ .$$

Výpočtem zjistíme

$$\frac{\partial F}{\partial a_j} = -2 \sum_{i=0}^{T-j} (x_{i,j} - y_i\ a_j)\ y_i\ , \qquad \frac{\partial F}{\partial y_i} = -2 \sum_{j=0}^{T-i} (x_{i,j} - y_i\ a_j)\ a_j\ .$$

Položíme vypočtené derivace rovny nule. Dostaneme

$$\sum_{i=0}^{T-j} (x_{i,j} - y_i\, a_j)\, y_i = 0\,, \qquad \sum_{j=0}^{T-i} (x_{i,j} - y_i\, a_j)\, a_j = 0\,.$$

Odtud dostaneme

$$a_j = \frac{\sum_{i=0}^{T-j} x_{i,j}\, y_i}{\sum_{i=0}^{T-j} y_i^2}\,, \qquad y_i = \frac{\sum_{j=0}^{T-i} x_{i,j}\, a_j}{\sum_{j=0}^{T-i} a_j^2}\,.$$

Uvedenou soustavu vztahů řešíme iterační metodou. Vyjdeme z počáteční aproximace hodnot. Vyjdeme např. z počáteční aproximace hodnot $^{(0)}y_i$ i=0,1,…,T a aplikujeme iteraci

$$^{(n)}a_j = \frac{\sum_{i=0}^{T-j} x_{i,j}\; ^{(n)}y_i}{\sum_{i=0}^{T-j} {}^{(n)}y_i^2}\,, \qquad ^{(n+1)}y_i = \frac{\sum_{j=0}^{T-i} x_{i,j}\; ^{(n)}a_j}{\sum_{j=0}^{T-i} {}^{(n)}a_j^2}\,.$$

Po dosažení požadované přesnosti určíme hodnoty a_j tak, aby byly nezáporné a jejich součet byl roven jedné. Upravených hodnot a_j se použije k výpočtu hodnot y_i . Po získání hodnot a_j , y_i se provede rekonstrukce hodnot $x_{i,j}$ podle vztahu $x_{i,j} = y_i\, a_j$. Na základě rekonstruovaných hodnot se určí hledaná rezerva.

Literatura

Cipra T.: Pojistná matematika teorie a praxe, Ekopress 1999, str. 398

Mandl P. Mazurová L.: Matematické základy neživotního pojištění, Matfyzpress vydavatelství MMF UK, Praha 1999, str. 114

Sekerka B.: Matematické a statistické metody ve financování, cenných papírech a pojištění, Profess Consulting, Praha 2002, str.532

Abecední seznam účastníků konference

Mgr. Pavla Bartošková, *Národní ústav odborného vzdělávání Praha,*
bartosko@nuov.cz
Doc. RNDr. Josef Benda, CSc., *BIVŠ Praha*
jbenda@bivs.cz
Prof. RNDr. Viktor Beneš, DrSc., *SVŠES Praha*
viktor.benes@svses.cz
Ing. Vladimír Beneš, *BIVŠ Praha*
vbenes@bivs.cz
RNDr. Petr Budínský, CSc., *VŠFS Praha*
petr.budinsky@vsfs.cz
Doc. Ing. Dagmar Blatná, CSc., *VŠE Praha*
blatna@vse.cz
Mgr. Jana Borůvková, *VOŠ Jihlava*
vosji@vosji.cz
Michal Buzek, *SVŠES Praha*
sbuzm91@svses.cz
Doc. RNDr. Jan Coufal, CSc., *SVŠES Praha*
coufal@vse.cz
Mgr. Andrea Čelonková, *VOŠ Jihlava*
vosji@vosji.cz
Prof. RNDr. Anna Čermáková, DrSc., *ZF JU České Budějovice*
annacer@zf.jcu.cz
Mgr. Jarmila Helmanová, *SVŠES Praha*
jarmila.helmanova@svses.cz
Ing. Milan Hála, *SVŠES Praha*
milan.hala@svses.cz
Doc.RNDr. Josef Hvorecký, CSc., *Vysoká škola manažmentu Trenčín*
hvorecky@cutn.sk
Radka Jůzková, *MFF UK Praha*
rjuzkova@artax.karlin.mff.cuni.cz
Ing. Mgr. Miloslav Marek, *rektor SVŠES Praha*
rektor@svses.cz
Doc. PhDr. Stanislav Nečas, CSc., *SVŠES Praha*
stanislav.necas@svses.cz
RNDr. Josef Požár, CSc, *Policejní akademie ČR Praha*
pozar@mvcr.cz
Doc. RNDr. Bohuslav Sekerka, CSc., *SVŠES Praha*
bohuslav.sekerka@svses.cz
Prof. RNDr. Josef Štěpán, DrSc., *MFF UK Praha*
stepan@karlin.mff.cuni.cz
Mgr. Petr Šulc, *Škoda Auto vysoká škola, Mladá Boleslav*
petr.sulc@skoda-auto.cz
Doc. Ing. Jiří Trešl, CSc., *SVŠES Praha*
tresl@vse.cz